第七章 假设检验

1. 假设检验的基本概念
2. 单个正态总体参数的假设检验
3. 两个正态总体参数的假设检验
4. 非正态总体参数的假设检验
5. 总体分布的假设检验
6. 本章小结

7.1 假设检验的基本概念

(一) 统计假设

(二) 假设检验

(三) 两类错误

(四) 否定域与检验统计量

(五) 假设检验的基本思想

(六) 假设检验的一般步骤

（一）统计假设

我们把关于总体(分布、特征、相互关系等)的论断称为统计假设, 记作 H. 例如:

(1) 对某一总体 X 的分布提出某种假设, 如 H: X 服从正态分布, 或 H: X 服从二项分布, 等等;

(2) 对于总体 X 的分布参数提出某种假设, 如 H: $\mu=\mu_0$, 或 H: $\mu\leqslant\mu_0$, 或 H: $\sigma^2=\sigma_0^2$, 或 H: $\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$, 等等(其中 μ_0, σ_0^2 是已知数, μ, σ^2 是未知参数);

(3) 对于两个总体 X 与 Y 提出某种假设, H: X, Y 具有相同的分布, H: X, Y 相互独立, 等等.

（一） 统计假设

统计假设一般可以分成参数假设与非参数假设两种.

参数假设是指在总体分布类型已知的情况下，关于未知参数的各种统计假设；

非参数假设是指在总体分类类型不确知或完全未知的情况下，关于它的各种统计假设.

（一）统计假设

关于总体的假设通常是提出两个相互对立的假设，把需要检验是否为真的假设称为原始假设或零假设，用 H_0 表示，而把与之对立的另一个假设称为备择假设或对立假设，用 H_1 表示.

如零假设 H_0：$\mu=100$，其备择假设 H_1：$\mu\neq100$；

零假设 H_0：X 服从 $N(\mu, \sigma^2)$，其备择假设 H_1：X 不服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 等.

(二) 假设检验

1 参数检验与非参数检验

把检验参数假设的问题称为参数检验；而把检验非参数（如分布）假设的问题，称为非参数检验（或分布检验）.

说明：（1）不论在哪种统计检验中，所谓对 H_0 进行检验，就是建立一个准则来考核样本，若样本值满足该准则就接受 H_0，否则就拒绝 H_0. 我们称这种准则为检验准则，或简称为检验.

（2）一个检验准则本质上就是将样本可能取值的集合 D（统称为样本空间）划分成两个部分 V 与 $\overline{V}$，

2. 拒绝域（否定域）与接受域

当样本值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V$ 时，认为假设 H_0 不成立，从而否定 H_0（此时，若 H_1 存在则判其成立，即接受 H_1）；相反，当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \notin V$，即 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \overline{V}$ 时，认为 H_0 成立，从而接受 H_0（此时否定 H_1）. 通常我们称 V 为 H_0 的否定域，$\overline{V}$ 为 H_0 的接受域.

（三） 两类错误

样本本身是具有随机性的，通过样本进行判断时，可能犯以下两类错误：

(1) 当 H_0 为真时，样本值却落入了 V，H_0 成立判为 H_0 不成立（即否定了真实的假设），称这种错误为“以真当假”的错误或第一类错误，记$\tilde{\alpha}$为犯此类错误的概率，

$$P\{否定H_0 | H_0为真\} = \tilde{\alpha};$$

(2) 当 H_1 为真时，而样本值却落入了$\bar{V}$，H_0 不成立判为 H_0 成立（即接受了不真实的假设），称这种错误为“以假当真的错误或第二类错误，记$\tilde{\beta}$为犯此类错误的概率，

$$P\{接受H_0 | H_1为真\} = \tilde{\beta}.$$

（三） 两类错误

在样本容量一定的情况下，给出允许犯第一类错误的一个上界 α，对于固定的 n 和 α，我们选择检验准则，使得在犯第一类错误的概率 $\tilde{\alpha}$ 不大于 α 的情况下，第二类错误出现的概率 $\tilde{\beta}$ 最小。我们称这种检验准则为最优检验准则。对犯第一类错误的概率 $\tilde{\alpha}$ 加以限制，而不考虑犯第二类错误的概率。在这种情况下，确定否定域 V 时只涉及零假设 H_0，而不涉及对立假设 H_1。这种统计假设检验问题称为显著性检验问题。显著性检验中。

允许犯第一类错误的上界 α 称为显著性水平或检验水平

（四） 否定域与检验统计量

否定域可以通过某个检验统计量 $K=K(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来描述, 即

否定域 V 可表示为 $V=\{(\square_1, \square_2, \cdots, \square_{\square}) \mid K(\square_1, \square_2, \cdots, \square_{\square}) \in \square_{\square}\}$,

即 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in V$ 与 $K(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_\alpha$ 是等价的.

$$\square\{\square \in \square_{\square} \mid \square_0 \text{为真}\} = P\{(\square_1, \square_2, \cdots, \square_{\square}) \in V \mid \square_0 \text{为真}\} = \tilde{\alpha},$$

$$\square\{\square \in \bar{R}_{\square} \mid \square_1 \text{为真}\} = P\{(\square_1, \square_2, \cdots, \square_{\square}) \in \overline{\square} \mid \square_1 \text{为真}\} = \tilde{\beta}.$$

根据样本值来计算统计量 K 的值 $\hat{\square}$, 做出等价的判断:

当 $\hat{\square} \in R_\alpha$ 时, 我们就否定 H_0; 当 $\hat{\square} \in \bar{R}_{\square}$ 时, 我们就接受 H_0.

（四） 否定域与检验统计量

否定域 R_α 常以下面三种形式给出：

$$（1）\ \square_{\square} = \{x | -\infty < x < \square_1 \text{或} \square_2 < x < +\infty\},$$

我们把否定域为上述形式的检验称为双侧检验；

$$（2）\ \square_{\square} = \{x | \lambda < x < +\infty\},$$

我们把否定域为上述形式的检验称为右侧检验；

$$（3）\ \square_{\square} = \{x | -\infty < x < \lambda\},$$

我们把否定域为上述形式的检验称为左侧检验.

注： 左、右侧检验统称为单侧检验.

（五） 假设检验的基本思想

假设检验问题是统计推断的另一类重要问题.

通常借助于直观分析和理论分析相结合的做法，其基本原理就是人们在实际问题中经常采用的所谓实际推断原理："一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的".

把"小概率事件在一次试验中发生了"看成是不合理的现象.

小概率事件就是事件$\{K \in R_\alpha\}$，其概率就是检验水平α，通常我们取$\alpha=0.05$，有时也取0.01或0.10.

（六） 假设检验的一般步骤

单、双正态总体参数假设检验的一般步骤规定如下：

(1) 提出假设. 根据实际问题提出零假设 H_0 与备择假设 H_1, 即说明所要检验的假设的具体内容.

(2) 选择统计量. 在零假设 H_0 为真的条件下, 该统计量的精确分布(小样本情况)或极限分布(大样本情况)已知.

(3) 由检验水平 α, 找出临界值. 根据显著性水平 α 与统计量的分布查表, 确定对应于此 α 的临界值.

(4) 做出判断. 根据样本观测值计算统计量的值, 并与临界值比较, 从而做出接受或拒绝零假设 H_0 的结论.

7.2 单个正态总体参数的假设检验

（一）单个正态总体均值的假设检验

（二）单个正态总体方差的假设检验

设总体 X~N(μ，σ²)，从总体 X 中抽取一个容量为 n 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本均值和样本方差分别为

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

（一）单个正态总体均值的假设检验

1. 总体方差 σ^2 已知时，总体均值 μ 的假设检验

（1）双侧检验：

提出零假设 $H_0: \mu = \mu_0$，备择假设 $H_1: \mu \neq \mu_0$.

选择统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

当 H_0 成立时，

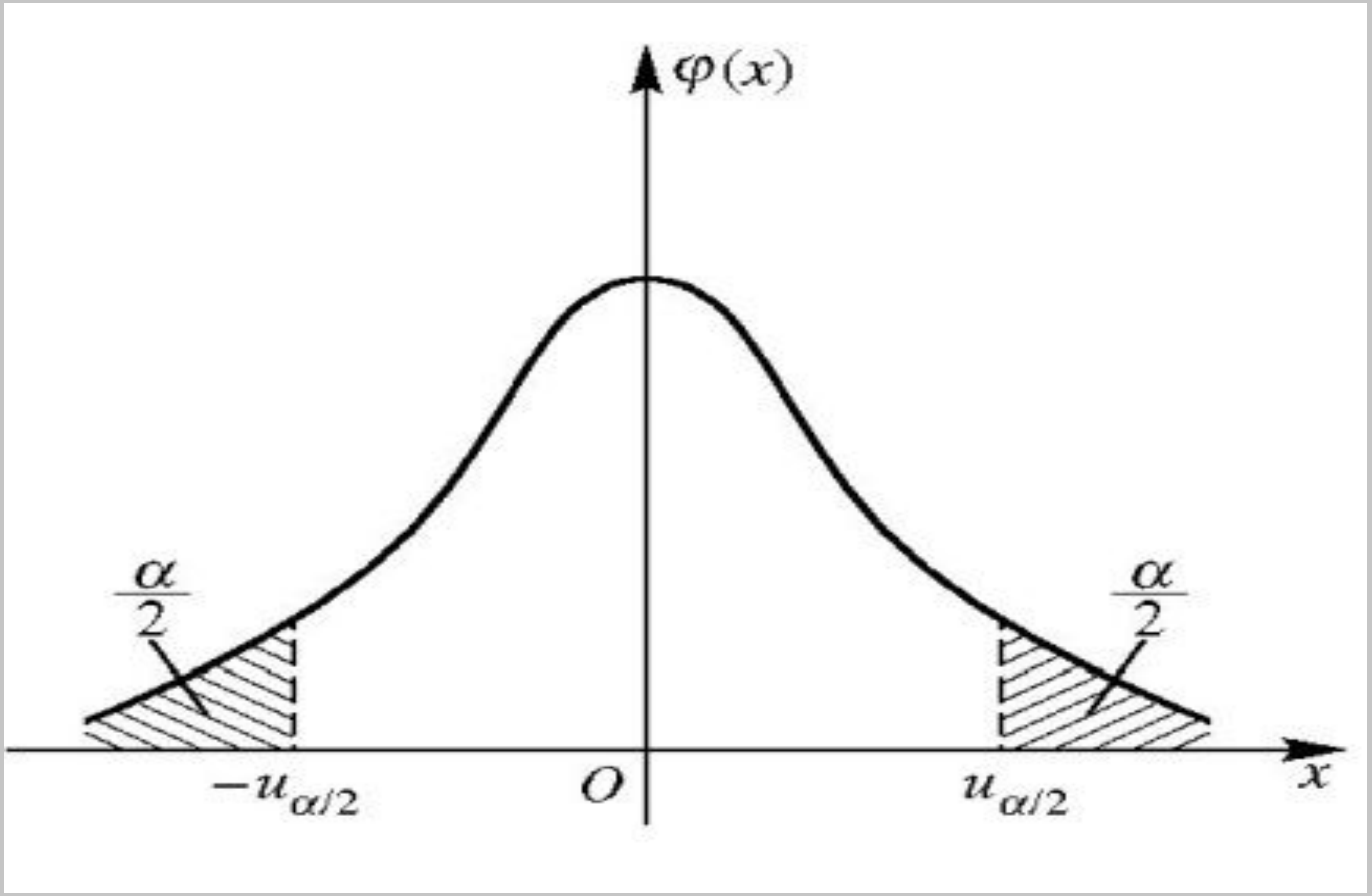
$$\bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right), \qquad U \sim N(0, 1).$$

对于给定的显著性水平 α，查标准正态分布表（附表 2）得临界值 $u_{\alpha/2}$，有 $P(|U|>u_{\alpha/2})=\alpha$（见图 7—1）. 由样本值计算统计量 U.

当 $|U|>u_{\alpha/2}$ 时，小概率事件发生，拒绝零假设 H_0；当 $|U|\leqslant u_{\alpha/2}$ 时，接受零假设 H_0. 这种检验法称为 U 检验法.

（一）单个正态总体均值的假设检验

1. 总体方差σ^2已知时，总体均值μ的假设检验



（一）单个正态总体均值的假设检验

1. 总体方差σ^2已知时，总体均值μ的假设检验

例 1 已知滚珠直径服从正态分布. 现随机地从一批滚珠中抽取 6 个，测得其直径为 14.70, 15.21, 14.90, 14.91, 15.32, 15.32 (mm). 假设滚珠直径总体分布的方差为 0.05，问这一批滚珠的平均直径是否为 15.25mm ($\alpha=0.05$)?

解 用 X 表示滚珠的直径，已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\sigma^2=0.05$. 这是一个已知方差，检验均值的问题.

首先提出零假设，写出基本假设H_0的具体内容. 这里我们要检验这批滚珠平均直径是否为 15.25，即 H_0: $\mu=15.25$.

（一） 单个正态总体均值的假设检验

1. 总体方差 σ^2 已知时，总体均值 μ 的假设检验

然后选择一个统计量，即找一个（包括指定数值的）统计量，使得它在 H_0 成立的条件下与一个（包括总体的待检验参数的）样本函数有关. 这里我们选前面所给出（包括指定数值 15.25）的 U 统计量，

$$U=\frac{\bar{X}-15.25}{\sigma_0/\sqrt{n}}.$$

在 H_0 成立的条件下，U 与（包括总体的待检参数 μ 的样本函数

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

都服从标准正态分布

（一） 单个正态总体均值的假设检验

1. 总体方差 σ^2 已知时，总体均值 μ 的假设检验

再由检验水平 $\alpha=0.05$，选择区域

$$□_{□} = \{(-\infty, □_1)\cup(□_2, +\infty)\},$$

使得

$$□\{□\in(-\infty, □_1)\} = P\{u\in(□_2, +\infty)\} = \frac{□}{2},$$

即 $P\{u\in □_{□}\} = \alpha$,

可见这里 $\{u\in R_\alpha\}$ 是一个小概率事件.

由于标准正态分布的对称性可知 $\lambda_2=-\lambda_1\triangleq\lambda$. 考虑到正态分布数值表的构造(前面已介绍)，令

$$□(□) = 1-\frac{□}{2},$$

（一）单个正态总体均值的假设检验

1. 总体方差 σ^2 已知时，总体均值 μ 的假设检验

可以找出临界值 λ：这里的 $\alpha=0.05$，根据 $\Phi(\lambda)=1-\frac{0.05}{2}=0.975$，查标准正态分布表（见附表 2）得到 $\lambda=1.96$，故否定域

$$□_{□} = \{(-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)\}.$$

最后由样本计算统计量 U 之值 $\hat{□}$，这里

$$\bar{x} = 15.06, \qquad \hat{□} = \frac{15.06-15.25}{\sqrt{0.05}/\sqrt{6}} \approx -2.08.$$

于是我们可以做出判断：若 $\hat{□} \in R_\alpha$，则否定 H_0，否则认为 H_0 相容.

（一） 单个正态总体均值的假设检验

1. 总体方差 σ^2 已知时，总体均值 μ 的假设检验

(2) 右侧检验：

提出零假设 $H_0: \mu \leqslant \mu_0$，备择假设 $H_1: \mu > \mu_0$.

选择样本函数 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$，

对于给定的显著性水平 α，查标准正态分布表（附表 2）得临界值 u_α，使得

$$P(U > u_\alpha) = \alpha,$$

如图 7—2 所示. 在零假设 H_0 成立时，有

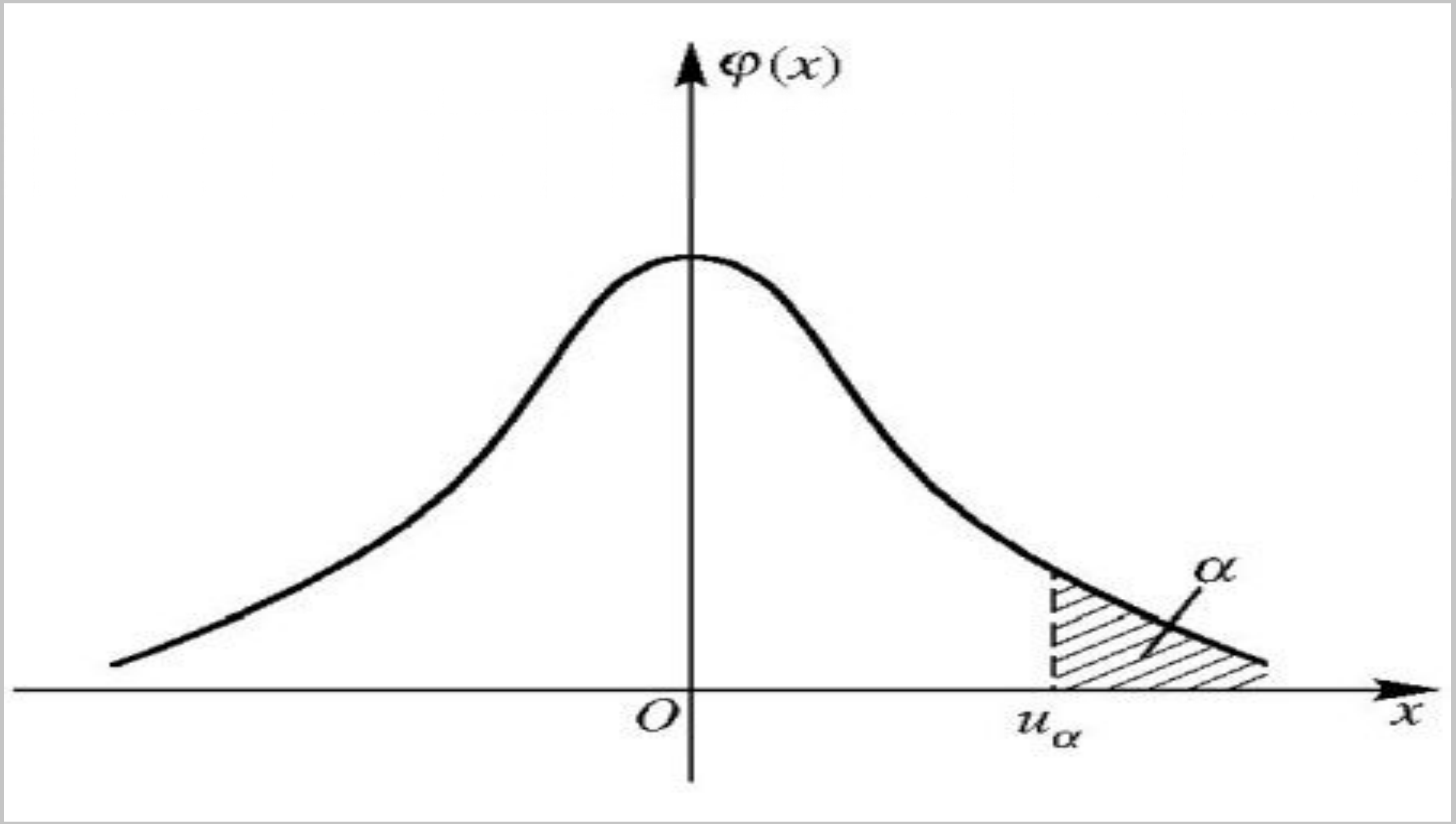
$$U = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = u,$$

从而

$$P(U > u_\alpha) \leq P(u > u_\alpha) = \alpha,$$

即 $P(U>u_\alpha) \leqslant \alpha$.

（一）单个正态总体均值的假设检验



（一） 单个正态总体均值的假设检验

1. 总体方差 σ^2 已知时，总体均值 μ 的假设检验

(3)左侧检验：

提出零假设 $H_0:\mu\geq\mu_0$，备择假设 $H_1:\mu<\mu_0$（μ_0 已知）.

类似右侧检验的分析，当统计量 $U<-u_\alpha$ 时，拒绝零假设 H_0；当 $U\geq u_\alpha$ 时，不能拒绝零假设 H_0.

（一） 单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

总体方差 σ^2 未知，可用样本的方差 S^2 代替，这时检验统计量

$$T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

利用 T 统计量进行假设检验的方法称为 t 检验法.

（一）单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差σ^2未知时，总体均值μ的假设检验

(1) 双侧检验：

提出零假设 $H_0: \mu=\mu_0$，备择假设 $H_1: \mu\neq\mu_0$.

给定显著性水平α，查 t 分布表（附表 4）得临界值 $t_{\alpha/2}(n-1)$，有

$$P(|T|>t_{\alpha/2}(n-1))=\alpha.$$

由样本计算统计量 T，当 $|T|>t_{\alpha/2}(n-1)$ 时，拒绝零假设 H_0；否则不能拒绝零假设 H_0.

（一） 单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

(1) 双侧检验：

提出零假设 $H_0: \mu=\mu_0$，备择假设 $H_1: \mu\neq\mu_0$.

给定显著性水平 α，查 t 分布表（附表 4）得临界值 $t_{\alpha/2}(n-1)$，有

$$P(|T|>t_{\alpha/2}(n-1))=\alpha.$$

由样本计算统计量 T，当 $|T|>t_{\alpha/2}(n-1)$ 时，拒绝零假设 H_0；否则不能拒绝零假设 H_0.

（一） 单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

例 3　用某仪器间接测量温度，重复五次，所得数据是 1250°C, 1265°C, 1245°C, 1260°C, 1275°C，而用别的精确办法测得温度为 1277°C（可看作温度的真值），试问用此仪器间接测量温度有无系统偏差（α=0.05）？

解　用 X 表示由这个仪器测得的数值，有 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 未知，这是一个未知方差，检验均值问题。

提出零假设 $H_0: \mu = 1277$；对于这类问题，我们选取一个包括指定数值 1277 的统计量

$$\square = \frac{\bar{X}-1277}{\square/\sqrt{\square}},$$

（一） 单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

其中 $S=\square\sqrt{\frac{1}{\square-1}\sum_{\square=1}^{\square}(\square_{\square}-\bar{X})^2}$. 在 H_0 成立的条件下，T 与样本函数

$$\square=\frac{\bar{X}-\mu}{\square/\sqrt{\square}}$$

都服从 t(n−1) 分布，

这里我们采取双边检验. 由检验水平 α，选择

$$\square_{\square}=\{(-\infty,\square_1)\cup(\square_2,+\infty)\}$$

且使得

$$\square\{\square\in(-\infty,\square_1)\}=P\{t\in(\square_2,+\infty)\}=\alpha/2,$$

即使得

$$\square\{\square\in\square_{\square}\}=\alpha.$$

（一）单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

可见 $\{t\in R_\alpha\}$ 是一个小概率事件. 由 t 分布的对称性，可知 $\lambda_2=-\lambda_1\triangleq\lambda$. 考虑到 t 分布临界值表的构造(前面已介绍)，可由 $t_{\alpha/2}(n-1)$ 查出 λ 之值.

例3中的 $\alpha=0.05$, $n=5$, 由 $t_{0.025}(4)$ 查 t 分布临界值表，查得 $\lambda=2.776$, 故否定域为

$$\square_{\square}=((-\infty,-2.776)\cup(2.776,+\infty)).$$

（一） 单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

由样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，计算

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(1250 + \cdots + 1275) = 1259,$$

$$\square^2 = \frac{1}{4}[(1250-1259)^2 + \cdots + (1275-1259)^2] \text{有} \hat{\square}$$

$$= 570 \times \frac{1}{4} = 142.5,$$

$$= \frac{1259-1277}{\sqrt{142.5/5}} \approx -3.37.$$

于是我们可以做出判断：若 $\hat{\square} \in R_\alpha$，则否定 H_0，否则认为 H_0 相容．本例中 $\hat{\square} \approx -3.37 < -2.776$，即 $\hat{\square} \in R_\alpha$，故结论为否定 H_0：μ =1277．换句话说，该仪器间接测量温度有系统偏差．

（一）单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

（2）右侧检验：

提出零假设 H_0：$\mu \leqslant \mu_0$，备择假设 H_1：$\mu > \mu_0$。

给定显著性水平 α，查 t 分布表（附表 4）得临界值 $t_\alpha(n-1)$，有

$$P(T>t_\alpha(n-1)) \leqslant \alpha .$$

由样本计算统计量 T，当 $T>t_\alpha(n-1)$ 时，拒绝零假设 H_0 否则不能拒绝零假设 H_0。

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

例 4 在例 3 中，我们进一步问此仪器间接测量的温度是否偏低（$\alpha=0.05$）？

解 用 X 表示由这个仪器测得的数值，有 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 σ^2 未知，这是一个未知方差，检验均值的问题.

提出零假设 $H_0: \mu \leqslant 1277$. 这里我们仍选取 T 统计量

$$T=\frac{\bar{X}-1277}{S/\sqrt{n}}.$$

在 $H_0: \mu \leqslant 1277$ 成立的条件下，有不等式

$$\frac{\bar{X}-1277}{S/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}},$$

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

因此，T 与随机变量 $t=\frac{\bar{X}-\mu}{\square/\square}$ 有如下的关系

$$\square \leq \square \sim \square(\square-1).$$

这里我们采取单边检验，由检验水平 α，选择 $R_\alpha=(\lambda, +\infty)$，使得

$$\square\{\square > \square\} = \square,$$

根据 t 分布数值表的构造，由 $t_\alpha(n-1)$ 查得 λ，于是由

$$\square \leq \square$$

有 $\{T > \lambda\} \subset \{t > \lambda\}$，

故 $P\{T > \lambda\} \leq P\{t > \lambda\} = \alpha$.

（一） 单个正态总体均值的假设检验

2. 总体方差 σ^2 未知时，总体均值 μ 的假设检验

上式说明事件 $\left\{\dfrac{\bar{X}-1277}{S/\sqrt{n}} > \lambda\right\}$ 是概率比 α 更小的小概率事件.

例中 $\alpha=0.05$, $n=5$, 由 $t_{0.05}(4)$ 查 t 分布临界值表, 得到 $\lambda=2.132$, 故否定域为

$$R_{\alpha} = (2.132, +\infty).$$

由样本值算出

$$\bar{x} = 1259, \quad s^2 = 142.5, \quad \hat{t} = -3.37.$$

由于 $\hat{t}=-3.37<2.132$, 即 $\hat{t}\notin R_{\alpha}$, 故结论为 $H_0: \mu \leqslant 1277$ 相容. 换句话说, 此仪器间接测量温度偏低.

2. 总体方差σ^2未知时，总体均值μ的假设检验

(3) 左侧检验：提出零假设$H_0: \mu \geq \mu_0$，备择假设$H_1: \mu < \mu_0$.

类似右侧检验，当统计量$T<-t_\alpha(n-1)$时，拒绝零假设H_0；否则不能拒绝零假设H_0.

（二）单个正态总体方差的假设检验

（1）双侧检验：

①提出零假设 H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$，备择假设 H_1: $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ （σ_0^2已知）

②统计量

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1).$$

③对于给定的显著性水平α，查χ²分布表（附表3）得临界值$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$和$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$，有 $P(\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1))=\alpha/2$ 和 $P(\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1))=\alpha/2$.

④用样本值计算统计量χ²，当 $\chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ 时拒绝零假设H_0；否则不能拒绝H_0.

（二）单个正态总体方差的假设检验

例 5　已知幼儿的身高在正常情况下服从正态分布．现从某一幼儿园 5 岁至 6 岁的幼儿中随机地抽查了 9 人，其高度（单位：cm）分别为

115，120，131，115，109，115，115，105，110．问 5 岁至 6 岁的幼儿身高总体的方差是否为 49（α =0．05）？

解　用 X 表示幼儿身高，有 $X \sim N(\mu，\sigma^2)$，其中 μ 未知．这是一个未知均值检验方差的问题．

①这个问题的零假设是 H0：σ 2=49．

②我们选取统计量

$$\square = \frac{(\square-1)\square^2}{49}.$$

（二）单个正态总体方差的假设检验

③由 $\alpha=0.05$, $n=9$, $\lambda_1=\square^2_{1-\square/2}(8)$ 和 $\lambda_2=\square^2_{\square/2}(8)$，查 χ^2 分布临界值表得到 $\lambda_1=2.18$, $\lambda_2=17.5$. 故否定域为

$$\square_{\square}=\{(0,2.18)\cup(17.5,+\infty)\}.$$

④再由样本值算出

$$\bar{x}=115,\quad \hat{\square}^2=55.25,\quad \hat{\square}\approx 9.02.$$

由于 $2.18<\hat{\square}=9.02<17.5$, 即 $\hat{\square}\notin R_\alpha$, 故结论为 H_0 相容. 这就是说, 没有发现身高的总体方差不等于 49.

（二）单个正态总体方差的假设检验

(2) 右侧检验：

①提出零假设 H_0: $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$，备择假设 H_0: $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

②统计量

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1).$$

③对于给定的显著性水平 α，查 χ^2 分布表(附表 3)得临界值 $\chi_\alpha^2(n-1)$，有 $P(\chi^2 \geqslant \chi_\alpha^2(n-1)) = \alpha$.

④计算统计量 χ^2，当 $\chi^2 > \chi_\alpha^2(n-1)$ 时，拒绝零假设 H_0；否则不能拒绝 H_0.

（二）单个正态总体方差的假设检验

例 6　问例 5 中，5 岁至 6 岁幼儿身高的总体方差是否小于等于 49（$\alpha=0.05$）？

解　用 X 表示幼儿身高，有 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 未知，这是一个未知均值，检验方差的问题.

①这个问题的零假设是 H_0：$\sigma^2 \leqslant 49$.

②我们仍选取统计量 $\square = \dfrac{(\square-1)\square^2}{49}$.

③根据 $\alpha=0.05$，$n=9$，由 $\lambda=\square^2_{0.05}(8)$ 查 χ^2 分布临界值表得 $\lambda=15.5$，故否定域为 $\square_{\square}=\{15.5, +\infty\}$.

④由样本值算出 $\bar{x}=115$，$\square^2=55.25$，$\hat{\square}=9.02$.

由于 $\hat{\square}=9.02<15.5$，即 $\hat{\square}\notin R_\alpha$，故结论为 H_0 相容. 这就是说没有发现身高的总体方差大于 49.

（二）单个正态总体方差的假设检验

例 6　问例 5 中，5 岁至 6 岁幼儿身高的总体方差是否小于等于 49（$\alpha=0.05$）？

解　用 X 表示幼儿身高，有 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 未知，这是一个未知均值，检验方差的问题.

①这个问题的零假设是 $H_0: \sigma^2 \leqslant 49$.

②我们仍选取统计量 $\square = \frac{(\square-1)\square^2}{49}$.

③根据 $\alpha=0.05$, $n=9$, 由 $\lambda=\square^2_{0.05}(8)$ 查 χ^2 分布临界值表得 $\lambda=15.5$，故否定域为 $\square_{\square}=\{15.5,+\infty\}$.

④由样本值算出 $\bar{x}=115$, $\square^2=55.25$, $\hat{\square}=9.02$.

由于 $\hat{\square}=9.02<15.5$，即 $\hat{\square} \notin R_\alpha$，故结论为 H_0 相容. 这就是说没有发现身高的总体方差大于 49.

（二）单个正态总体方差的假设检验

(3) 右侧检验：

①提出零假设 H_0: $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$，备择假设 H_0: $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

②统计量

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1).$$

③对于给定的显著性水平 α，查 χ^2 分布表（附表 3）得临界值 $\chi_{\alpha}^2(n-1)$，有 $P(\chi^2 \leqslant \chi_{\alpha}^2(n-1)) = \alpha$.

④计算统计量 χ^2，当 $\chi < \chi_{\alpha}^2(n-1)$ 时，拒绝零假设 H_0；否则不能拒绝 H_0.

7.3 两个正态总体参数的假设检验

（一）两个正态总体均值的假设检验

（二）两个正态总体方差的假设检验

（一）两个正态总体均值的假设检验

设$X \sim N(\mu_1,)$，$Y \sim N(\mu_2,)$，$X_1, X_2, \ldots, X_m$为X的样本，$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$为Y的样本，$X_1, X_2, \ldots, X_m; Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$相互独立.

（一） 两个正态总体均值的假设检验

1. σ_1^2, σ_2^2 已知时均值的检验

(1) 双侧检验：

①提出零假设 $H_0: \mu_1=\mu_2$，备择假设 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

②统计量 $$U=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0,1).$$

③对于给定的显著性水平 α，查标准正态分布表(附表2)得临界值 $u_{\alpha/2}$，满足 $P(|U|>u_{\alpha/2})=\alpha$.

④计算统计量 U，当 $|U|>u_{\alpha/2}$ 时，拒绝 H_0；当 $|U|\leqslant u_{\alpha/2}$ 时，接受 H_0.

（一） 两个正态总体均值的假设检验

1. σ_1^2, σ_2^2 已知时均值的检验

(2) 右侧检验：

①提出零假设 $H_0: \mu_1 \leqslant \mu_2$，备择假设 $H_1: \mu_1 > \mu_2$.

②统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$.

③对于给定的显著性水平 α，查标准正态分布表(附表2)得临界值 $u_{\alpha/2}$，满足 $P(U > u_{\alpha/2}) = \alpha$.

④计算统计量 U，当 $U > u_{\alpha/2}$ 时，拒绝 H_0；当 $|U| \leqslant u_{\alpha/2}$ 时，接受 H_0.

（一） 两个正态总体均值的假设检验

1. σ_1^2, σ_2^2 已知时均值的检验

例 1 从甲、乙两厂所生产的钢丝总体 X, Y(它们均服从正态分布中各取 50 束做拉力强度试验，得 $\bar{x}=1208$mPa, $\bar{y}=1284$mPa. 已知 $\sigma_X=80$mPa, $\sigma_Y=94$mPa. 问：甲、乙两厂钢丝的抗拉强度是否有显著差异($\alpha=0.05$)？

解 ①检验零假设 $H_0: \mu_1=\mu_2$，备择假设 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$. ②计算统计量

$$|U| = \frac{|\bar{X}-\bar{Y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{|1208-1284|}{\sqrt{\frac{80^2}{50}+\frac{94^2}{50}}} \approx 4.35.$$

③对于给定的显著性水平 $\alpha=0.05$，查标准正态分布表(附表 2)求得临界值 $u_{\alpha/2}=1.96$，④因为统计量 $|U|=4.35>1.96$，所以拒绝 H_0 即认为甲、乙两厂钢丝的抗拉强度有显著差异.

（一） 两个正态总体均值的假设检验

2. $□_1^2=□_2^2$未知时均值的检验

(1) 双侧检验：

①提出零假设 H_0：$\mu_1=\mu_2$，备择假设 H_1：$\mu_1\neq\mu_2$.

②统计量 $□=\dfrac{\bar{X}-\bar{□}}{□_{□}\,□\sqrt{\frac{1}{□}+\frac{1}{□}}}\sim t(m+n-2)$.

③对于给定的显著性水平 α，查 t 分布表（附表 4）得临界值 $t_{\alpha/2}$，满足 $P(|T|>t_{\alpha/2}(m+n-2))=\alpha$（见图 7—3）.

④计算统计量 T 的值，当 $|T|>t_{\alpha/2}(m+n-2)$ 时，拒绝 H_0；当 $|T|\leqslant t_{\alpha/2}(m+n-2)$ 时，不能拒绝 H_0.

（一） 两个正态总体均值的假设检验

2. $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知时均值的检验

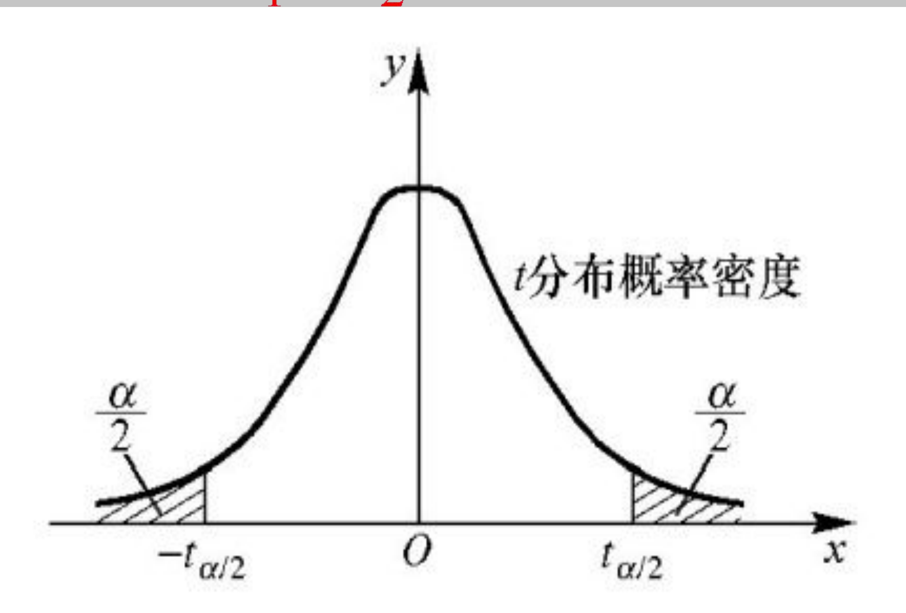


图7—3双侧检验

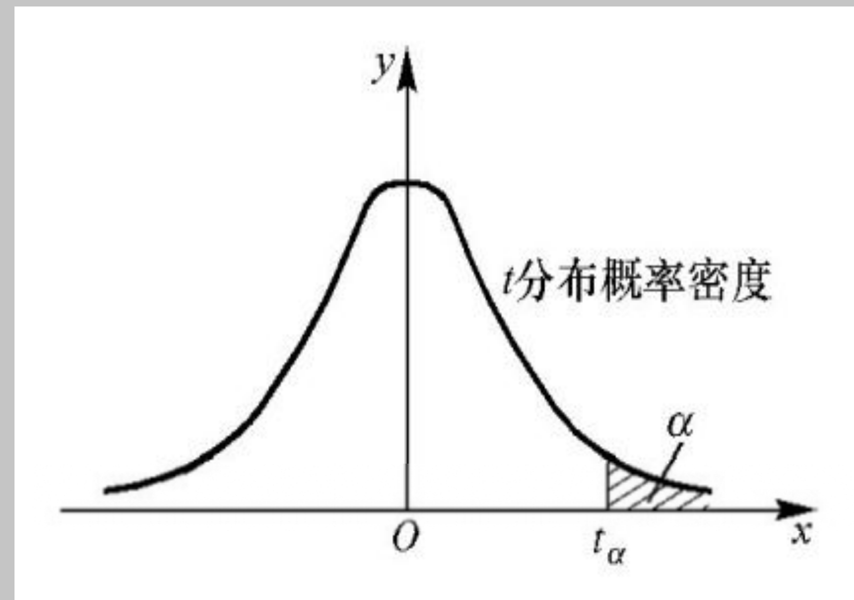


图7—4右侧检验

（一）两个正态总体均值的假设检验

2. $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知时均值的检验

(1) 右侧检验：

①提出假设 $H_0: \mu_1 \leqslant \mu_2$，备择假设 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$.

②统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$.

③对于给定的显著性水平 α，查 t 分布表（附表 4）得临界值 $t_{\alpha/2}$，满足 $P(T>t_{\alpha/2}(m+n-2))=\alpha$（见图 7—4）.

④计算统计量 T 的值，当 $T>t_{\alpha/2}(m+n-2)$ 时，拒绝 H_0；当 $T\leqslant t_{\alpha/2}(m+n-2)$ 时，不能拒绝 H_0.

（一） 两个正态总体均值的假设检验

例 2　在一台自动车床上加工直径为 2.050 毫米的轴，现在相隔 2 小时，各取容量都为 10 的样本，所得数据如下表所示，问这台车床的生产是否稳定（$\alpha=0.01$）？

零件编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
样本Ⅰ	2.066	2.063	2.068	2.060	2.067	2.063	2.059	2.062	2.062	2.060
样本Ⅱ	2.063	2.060	2.057	2.056	2.059	2.058	2.062	2.059	2.059	2.057

（一） 两个正态总体均值的假设检验

解 假设轴直径的分布是正态的，由于样本是取自同一台车床，可认为$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，而$\sigma^2$是未知常数. 又 m=n=10，由样本计算得

$$\bar{X}=2.063,\quad \bar{Y}=2.059,\quad S_1^2\approx 0.00000956,$$

$$S_2^2\approx 0.00000489.\quad S_w=0.002688,$$

①检验零假设 $H_0: \mu_1=\mu_2$，备择假设 $H_1: \mu_1\neq\mu_2$.

②由已知数据计算出

$$|T|=\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right|=\left|\frac{2.063-2.059}{0.002688\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}\right|\approx 3.327.$$

③给定显著性水平 $\alpha=0.01$，查 t 分布表得临界值 $t_{0.01/2}(10+10-2)=t_{0.005}(18)=2.88$.

④因为统计量 $|T|=3.327>2.88$，所以拒绝零假设 H_0，即认为这台机床受时间的影响而生产不稳定.

（二） 两个正态总体方差的假设检验

1. μ_1, μ_2已知时，正态总体方差的假设检验

(1) 双侧检验：

①提出零假设 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$，备择假设 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

②统计量
$$F=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2} \sim F(m,n).$$

③给定显著性水平α，查 F 分布表(附表 5)得临界值 $F_{\alpha/2}$，满足 $P(F>F_{\alpha/2}(m,n))=\alpha/2$，$P(F<F_{1-\alpha/2}(m,n))=\alpha/2$，如图 7—5 所示.

④计算统计量 F，当 $F_{1-\alpha/2}(m,n) \leqslant F \leqslant F_{\alpha/2}(m,n)$时，不能拒绝 H_0；否则拒绝 H_0.

注： 其中 $F_{\alpha/2}(m,n)$可直接查 F 分布表，由于
$$F_{1-\alpha/2}(m,n)=\frac{1}{F_{\alpha/2}(n,m)},$$
可通过查 $F_{\alpha/2}(n,m)$算得 $F_{1-\alpha/2}(m,n)$

（二）两个正态总体方差的假设检验

1. μ_1, μ_2 已知时，正态总体方差的假设检验

(1) 右侧检验：

①提出零假设 $H_0: \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$，备择假设 $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

②统计量

$$F = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2} \sim F(m,n).$$

③给定显著性水平 α，查 F 分布表（附表 5）得临界值 F_α，满足 $P(F>F_\alpha(m,n))=\alpha$（见图 7—6）.

④计算统计量 F，当 $F>F_\alpha(m,n)$ 时，拒绝 H_0；否则不能拒绝 H_0.

（二）两个正态总体方差的假设检验

1. μ_1, μ_2已知时，正态总体方差的假设检验

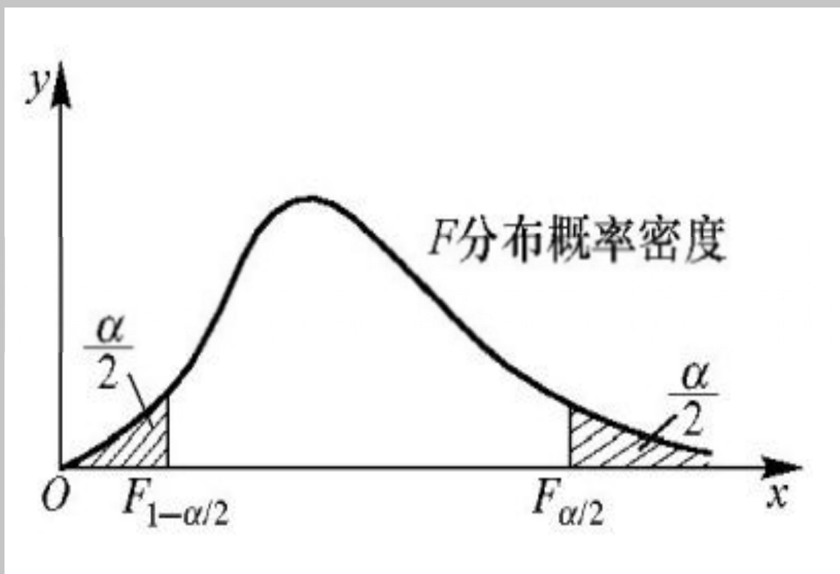


图7—5双侧检验

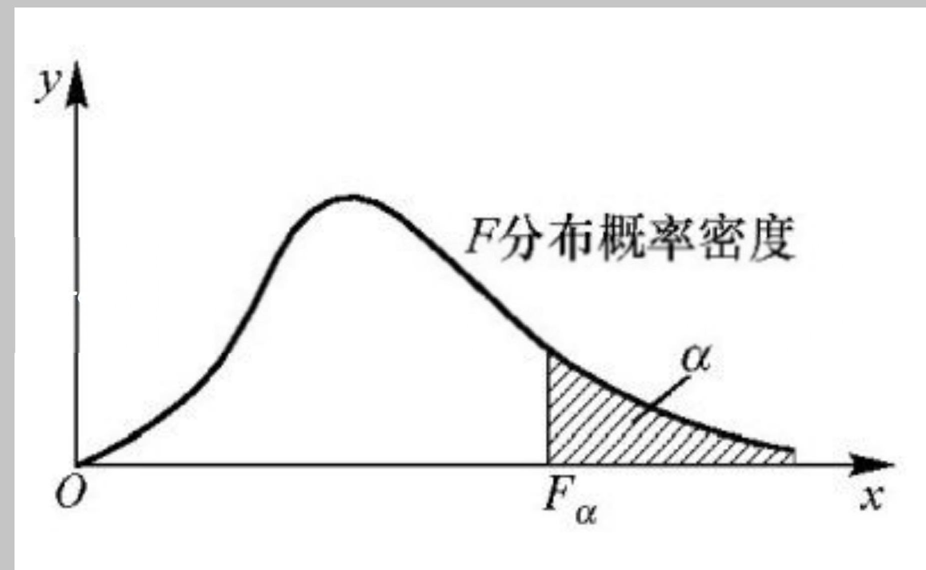


图7—6右侧检验

图7—

（二） 两个正态总体方差的假设检验

2. μ 1，μ 2 未知时，正态总体方差的假设检验

(1) 双侧检验：

①提出零假设 $H_0: \square_1^2=\square_2^2$，备择假设 $H_1: \square_1^2 \neq \square_2^2$.

②统计量 $\square = \dfrac{\square_1^2}{\square_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

③给定显著性水平 α，查 F 分布表（附表 5）得临界值 $F_{\alpha/2}$，$F_{1-\alpha/2}$，满足 $P(F>F_{\alpha/2}(m-1, n-1))=\alpha/2$，$P(F<F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1))=\alpha/2$.

④计算统计量 F，当 $F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \leqslant F \leqslant F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ 时，接受 H_0；否则不能拒绝 H_0.

2. μ1，μ2 未知时，正态总体方差的假设检验

(2) 右侧检验：

①提出零假设 $H_0: \square_1^2 \leqslant \square_2^2$，备择假设 $H_1: \square_1^2 > \square_2^2$.

②统计量 $\square = \dfrac{\square_1^2}{\square_2^2} \sim F(m-1, n-1)$.

③给定显著性水平 α，查 F 分布表（附表 5）得临界值 F_α，

满足 $P(F>F_\alpha(m-1, n-1))=\alpha$.

④计算统计量 F，当 $F>F_\alpha(m-1, n-1)$ 时，拒绝 H_0；否则不能拒绝 H_0.

（二） 两个正态总体方差的假设检验

2. μ 1, μ 2 未知时, 正态总体方差的假设检验

例 3 在例 2 中我们假定两个总体的方差$\square_1^2=\square_2^2$, 它们是真的相等吗?我们来检验一下(α =0. 1).

解 ①检验零假设 H_0: $\square_1^2=\square_2^2$, 备择假设 H_1: $\square_1^2\neq\square_2^2$.

已知 m=n=10, $\square_1^2\approx0.00000956$, $\square_2^2\approx0.00000489$.

②计算统计量$\square=\dfrac{\square_1^2}{\square_2^2}=\dfrac{0.00000956}{0.00000489}\approx1.96.$

③给定显著性水平 α =0. 1, 查 F 分布表(附表 5)得临界值

$$\square_{0.05}(9,9)=3.18,\quad \square_{0.95}(9,9)=\frac{1}{\square_{0.05}(9,9)}=\frac{1}{3.18}\approx0.31.$$

④因为 0. 31≤F=1. 96≤3. 18, 所以不能拒绝零假设 H_0, 即认为两个总体的方差无明显差异.

7.4 非正态总体参数的假设检验

（一）概率p的假设检验

（二）非正态总体均值的大样本检验

(一) 概率p的假设检验

(1)双侧检验

例 1 某种产品的废品率是 5%. 现从生产出的一批产品中随意抽取 50 个, 检验得知有 4 个废品, 问能否认为这批废品率为 5%(α =0. 05).

①这个假设检验需要检验的假设是:

$$\square_0:\ p = 0.05,\qquad \square_1:\ p \neq 0.05.$$

这是属于概率 p 的假设检验. 这一问题的一般数学模型如下.

设总体 X 服从两点分布:

X	1	0
p_i	p	q

(p+q=1, 0<p<1), 作下列假设检验:

$$\square_0:\ p = \square_0,\qquad \square_1:\ p \neq \square_0.$$

(一) 概率p的假设检验

②从这一总体取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$（n 充分大）. $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{m}{n}$即事件发生的频率，在例 1 中即为废品率. 当假设 H_0 成立时，

$$E(\bar{X}) = p_0, \quad D(\bar{X}) = \frac{p_0 q_0}{n}$$

$(q_0=1-p_0)$. 由棣莫弗–拉普拉斯中心极限定理，

$$U = \frac{\frac{m}{n}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1).$$

③上述假设检验为双侧检验. 对显著水平 α，拒绝域 W 取为

$$W = \{|U| > u_{\frac{\alpha}{2}}\}.$$

（一） 概率p的假设检验

④这样,由样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 得知事件发生的频率为$\frac{\square}{\square}$,算得 u 值.当$|u|>\square_{\frac{\square}{2}}$时,拒绝 H_0,即不能认为事件发生的概率为 p_0;当$|u|\leqslant\square_{\frac{\square}{2}}$时,不能拒绝 H_0,即可以认为事件发生的概率是 p_0.

在例 1 中,$\frac{\square}{\square}=\frac{4}{50}=0.08, p_0=0.05, q_0=0.95$,

$$\square=\frac{0.08-0.05}{\square\overline{\frac{0.05\times 0.95}{50}}}\approx 0.973.$$

当 $\alpha=0.05$ 时,$\square_{\frac{\square}{2}}=1.96$,因为

$$|\square|=0.973<\square_{\frac{\square}{2}}=1.96,$$

所以不能拒绝 H_0,即可以认为该批产品的废品率为 5% .

(一) 概率p的假设检验

(1)双侧检验

①作下列假设检验：$\square_0:\ p=\square_0,\quad \square_1:\ p\neq\square_0.$

②从这一总体取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$(n 充分大)由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理,

$$\square=\frac{\frac{\square}{\square}-\square_0}{\square\overline{\frac{\square_0\square_0}{\square}}}\overset{\cdot}{\sim}\square(0,1).$$

③对显著水平 α,拒绝域 W 取为$\square=\{|\square|>\square_{\frac{\square}{2}}\}$.

④这样,由样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 得知事件发生的频率为$\frac{\square}{\square}$,算得 u 值.当$|u|>\square_{\frac{\square}{2}}$时,拒绝 H_0,即不能认为事件发生的概率为 p_0;当$|u|\leqslant\square_{\frac{\square}{2}}$时,不能拒绝 H_0,即可以认为事件发生的概率是 p_0.

（一） 概率p的假设检验

⑵右侧检验

例 2　设某厂生产的产品每批数量很大,出厂标准是废品率不超过0.02,现从一批产品中随机抽取 400 个,经检测,发现有 12 个不合格.问是否应该让这批产品出厂(α=0.05)?

设 p 为这批产品的废品率,问题归结为假设检验:

$$\square_0 : p \le 0.02, \quad \square_1 : p > 0.02.$$

例 3　某青工以往的记录是:平均每加工 100 个零件,有 60 件是一等品.今年考核他,在他加工的零件中随机抽取 100 件,发现有 70 件是一等品.这个成绩是否证明该青工技术有了提高(α=0.05)?

这一问题的 p_0=0.6,假设检验问题为:

$$\square_0 : p \le 0.6, \quad \square_1 : p > 0.6.$$

（一） 概率p的假设检验

(2)右侧检验

①提出假设 $H_0: p \le p_0$, $H_1: p > p_0$.

②用上述 u 统计量 $u = \dfrac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$.

③对显著水平 α,拒绝域 W 取为:

$$W = \{u > u_\alpha\}.$$

④由样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 得知事件发生的频率为 $\frac{m}{n}$,算得 u 值.当 $u > u_\alpha$ 时,拒绝 H_0,即认为事件发生的概率 $p > p_0$;当 $u \le u_\alpha$ 时,不能拒绝 H_0,即不能认为 $p > p_0$.

（一） 概率p的假设检验

(3)左侧检验

①提出假设 $□_0: p \ge □_0, \quad □_1: p < □_0.$

②用上述 u 统计量 $□ = \dfrac{\frac{□}{□} - □_0}{\sqrt{\frac{□_0 □_0}{□}}} \overset{\bullet}{\sim} □(0,1).$

③对显著水平 α,拒绝域 W 取为: $□ = \{□ < -□_□\}.$

④由样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 得知事件发生的概率为 $\frac{□}{□}$,算得 u 值,当 $u < -u_\alpha$ 时,拒绝 H_0,即认为概率 $p < p_0$;当 $u \ge u_\alpha$ 时,不能拒绝 H_0,即不能认为 $p < p_0$.

(一) 概率p的假设检验

例 4　根据以往长期统计，某种产品的废品率不小于 5%. 但技术革新后，从此种产品中随机抽取 500 件，发现有 15 件废品. 问能否认为此种产品的废品率降低了（α =0.05）?

解　①假设检验问题为：$H_0:\ p \geq 0.05,\quad H_1:\ p < 0.05,$

②废品率为 $\frac{15}{500}=0.03$，$U = \dfrac{0.03-0.05}{\sqrt{\dfrac{0.05\times 0.95}{500}}} \approx -2.052,$

③当 α =0.05 时，$u_\alpha=1.645$. 因为

$$U = -2.052 < -u_\alpha = -1.645,$$

④所以拒绝 H_0，即认为废品率已降至 5%以下.

（二） 非正态总体均值的大样本检验

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的大样本$(n \geqslant 50)$, 根据中心极限定理, 设 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$, $\bar{X}$为样本均值, 则当 n 充分大时,

$$\frac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$$ 近似于 $N(0,1)$ 分布.

以它作为理论基础, 可以对非正态总体的均值作假设检验.

（二） 非正态总体均值的大样本检验

假设检验的类型为：

（1） $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$;

（2） $H_0: \mu \leqslant \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$;

（3） $H_0: \mu \geqslant \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$.

这三种情形皆用检验统计量

$$u = \frac{(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}\sqrt{n}.$$

当 σ^2 未知时，以样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ 代替总体标准差 σ，得 $\frac{(\bar{X}-\mu_0)}{S}\sqrt{n}$，仍记为 u. 当 n 充分大时，仍有

$u \dot{\sim} N(0,1)$.

（二） 非正态总体均值的大样本检验

检验法如下：

(1) 取拒绝域 $W=\{|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}$. 由样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 算得 u 值

若 $|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}$, 则拒绝 H_0; 若 $|u|\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$, 则不能拒绝 H_0.

(2) 取拒绝域 $W=\{u>u_\alpha\}$. 由样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 算得 u 值.

若 $u>u_\alpha$, 则拒绝 H_0; 若 $u\leqslant u_\alpha$, 则不能拒绝 H_0.

(3) 取拒绝域 $W=\{u<-u_\alpha\}$. 由样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 算得 u 值,

若 $u<-u_\alpha$, 则拒绝 H0; 若 $u\geqslant -u_\alpha$, 则不能拒绝 H0.

本节讨论的非正态总体均值的大样本检验用到的样本函数是 u, 所以此种检验称为 u 检验.

（二） 非正态总体均值的大样本检验

例 5　某城市每天因交通事故死亡人数服从泊松分布，根据长期统计资料，死亡人数均值为 3 人．近一年来，采用交通管理措施，据 300 天的统计，每天平均死亡人数为 2.7 人．问能否认为每天平均死亡人数显著减少（α =0.05）？

解　设每天死亡人数为 $X\sim P(\lambda)$，所以

$$E(X)=3,\quad D(X)=3.$$

①假设检验问题为 $H_0:\ \lambda\geq\lambda_0=3,\quad H_1:\ \lambda<\lambda_0=3.$

②检验统计量 $U=\dfrac{(\bar{X}-\lambda_0)}{\sqrt{\lambda_0}}\sqrt{n}=\dfrac{(2.7-3)}{\sqrt{3}}\sqrt{300}=-3,$

③当 α =0.05 时，$u_\alpha=1.645$.

④因为 $U=-3<-u_\alpha=-1.645,$

所以拒绝 H_0，即可认为每天平均死亡人数已显著减少．

7.5 总体分布的假设检验

（一）皮尔逊(Pearson)的 χ^2检验法

（二）总体分布假设的 χ^2检验法

（一） 皮尔逊(Pearson)的 χ^2检验法

皮尔逊定理　当 $n\to\infty$，χ^2的极限分布是自由度为 $r-1$ 的 χ^2分布，即 $\chi^2\sim\chi^2(r-1)$.

皮尔逊的 χ^2检验法：

①提出假设 $\square_0$： $P\{X=\square_{\square}\}=\square_{\square}$　$(i=1,2,\cdots,r)$.

②统计量 $\chi^2\sim\chi^2(r-1)$.

③对显著性水平 α， 计算 χ^2值

④当 $\chi^2>\square^2_{\square}(r-1)$时，拒绝 H_0；当 $\chi^2\leqslant\square^2_{\square}(r-1)$时，不能拒绝 H_0.

（一） 皮尔逊(Pearson)的 χ^2检验法

例 1 蒲丰(Buffon)曾将一枚硬币掷了 n=4040 次，正面发生 m=2048 次. 问能否认为“出现正面的概率是$\frac{1}{2}$”（α =0.05）？

解 设随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{当掷出正面,}\\ 0, & \text{当掷出反面.}\end{cases}$$

①原假设 H_0: $P\{X=1\}=\frac{1}{2}$, $P\{X=0\}=\frac{1}{2}$.

②由 n=4040, m=2048, 有 $\chi^2=\dfrac{\left(m-\frac{n}{2}\right)^2}{n/4}\approx 0.776.$

③当 α =0.05, $\chi^2_{0.05}(1)=3.841$. 因为

$$\chi^2=0.776<\chi^2_{0.05}(1)=3.841,$$

④所以不能拒绝 H_0, 即可认为掷出正面的概率是$\frac{1}{2}$.

（一） 皮尔逊(Pearson)的 χ^2检验法

例 2　掷一枚骰子 120 次，得点数的频数分布如下：

点数	1	2	3	4	5	6
频数	21	28	19	24	16	12

根据试验结果检验这枚骰子六个面是否匀称（$\alpha=0.05$）.

解①设掷出点数为 X，要检验：$H_0: P\{X=i\}=\frac{1}{6}\ (i=1,2,3,4,5,6)$，

②计算 χ^2：

$$\chi^2=\frac{\left(21-\frac{120}{6}\right)^2}{\frac{120}{6}}+\frac{\left(28-\frac{120}{6}\right)^2}{\frac{120}{6}}+\frac{\left(19-\frac{120}{6}\right)^2}{\frac{120}{6}}+\frac{\left(24-\frac{120}{6}\right)^2}{\frac{120}{6}}$$

$$+\frac{\left(16-\frac{120}{6}\right)^2}{\frac{120}{6}}+\frac{\left(12-\frac{120}{6}\right)^2}{\frac{120}{6}}=8.1.$$

③当 $\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.05}(5)=11.07$. ④因为 $\chi^2=8.1<\chi^2_{0.05}(5)=11.07$，所以不能拒绝 H_0，即可认为骰子的六个面是匀称的.

（二） 总体分布假设的 χ^2检验法

总体 X 的分布函数为 F(x).

①作下列假设检验：$\square_0$： $F(x) = \square_0(x)$,

其中 $F_0(x)$ 是一分布函数. 利用皮尔逊 χ^2 检验法对上述假设检验作一近似处理.

将实轴分为 r 个区间, 分点满足

$$-\infty = \square_0 < \square_1 < \square_2 < \cdots < \square_{\square-1} < \square_{\square} + \infty,$$

得 r 个区间：

$$(\square_0, \square_1],\quad (\square_1, \square_2],\quad \cdots,\quad (\square_{\square-2}, \square_{\square-1}],\quad (\square_{\square-1}, \square_{\square}).$$

（二） 总体分布假设的 χ^2 检验法

记事件 $A_i=\{a_{i-1}<X\leqslant a_i\}$ $(i=1,2,\cdots,r)$，则 A_i $(i=1,2,\cdots,r)$ 为完备事件组，且有

$$P(A_i)=F_0(a_i)-F_0(a_{i-1})\quad (i=2,3,\cdots,r-1),$$

$$P(A_1)=F_0(a_1)\quad (因\ a_0=-\infty),$$

$$P(A_r)=1-F_0(a_{r-1})\quad (因\ a_r=+\infty).$$

记 $P(A_i)=p_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$．这样，原来的假设检验问题化为：

$$H_0':\ P(A_i)=p_i\quad (i=1,2,\cdots,r).$$

（二） 总体分布假设的 χ^2 检验法

②设总体 X 的样本值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 它落入 A_i 的频数为 $m_i\,(i=1, 2, \cdots, r)$, 理论频数为 $np_i\,(i=1, 2, \cdots, r)$, 计算 $\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$.

③当 n 充分大时, $\chi^2 \sim \chi^2(r-1)$. 对显著水平 α,

④当 $\chi^2>\chi^2_\alpha(r-1)$ 时, 拒绝 H_0, 即认为 “$F(x)=F_0(x)$” 不成立; 当 $\chi^2\leqslant\chi^2_\alpha(r-1)$ 时, 不能拒绝 H_0, 即认为 “$F(x)=F_0(x)$” 成立.

（二） 总体分布假设的 χ^2 检验法

例 3　某电话交换台，在 100 分钟内记录了每分钟被呼唤的次数 x，设 m 为出现该 x 值的频数，整理后的结果如下：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	0	7	12	18	17	20	13	6	3	4

问：总体 X（电话交换台每分钟呼唤次数）服从泊松分布吗（α =0.05）？

解　假设检验问题为：$\square_0$： $X \sim P(\lambda)$.

因为 λ 是泊松分布的未知参数，λ 的极大似数估计为样本均值 $\bar{x}$：

$$\square = \bar{x} = (1 \times 7 + 2 \times 12 + \cdots + 9 \times 4)/100 = 4.33.$$

算出理论概率：$\square_{\square} = P\{X = i\} = \frac{\square^{\square}}{\square!} e^{-\square} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$,

进一步算出理论频数 np_i $(i=0, 1, 2, \cdots)$，得下表：

（二） 总体分布假设的 χ^2 检验法

X=i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 以上
p_i	0.013	0.057	0.123	0.178	0.193	0.167	0.121	0.075	0.040	0.033
np_i	1.3	5.7	12.3	17.8	19.3	16.7	12.1	7.5	4.0	3.4
m_i	0	7	12	18	17	20	13	6	3	4

由于 x=0、x=8 及 x≥9 组中 np_i 皆小于 5，将它们与相邻组合并，合并后组为"x≤1"，"x=2"，…，"x≥8"，共 8 组，即 r=8. 合并的组中的理论频率，实际频率由原来的组的相应的值分别相加. 如："x≥8" 组的理论频数为 7.4，实际频数为 7. 计算 χ^2 值，

$$\chi^2 = \frac{(7-7.0)^2}{7} + \frac{(12-12.3)^2}{12.3} + \cdots + \frac{(6-7.5)^2}{7.5} + \frac{(7-7.4)^2}{7.4} = 1.324,$$

它近似于 $\chi^2(8-1-1)=\chi^2(6)$ 分布. 当 $\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.05}(6)=12.59$.

因为 $\chi^2 = 1.324 < \chi^2_{0.05}(6) = 12.59$，

所以不能拒绝 H_0，即可以认为 X 服从泊松分布.