第一章 随机事件及其概率

1.1 随机事件

（一）随机现象

（二）随机试验

（三）随机事件

（四）事件的关系与运算

（一） 随机现象

自然界所观察到的现象： 确定性现象、随机现象

1. 确定性现象

在一定条件下，必然发生某一结果或必然不发生某一结果的现象称为**确定性现象.**

实例 “在标准大气压下，纯水加热到100度会沸腾”；

“同性电荷必然互斥”；

“函数在间断点处不存在导数” 等.

注 **确定性现象的特征：**条件完全决定结果.

（一） 随机现象

2. 随机现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为**随机现象.**

实例1 在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察正反两面出现的情况.

结果:有可能出现正面也可能出现反面.

实例2 从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品.

其结果可能为: 正品、次品.

（一） 随机现象

实例3 抛掷一枚骰子，观察出现的点数.

结果有可能为： 1, 2, 3, 4, 5 或 6.

实例4 过马路交叉口时，可能遇上各种颜色的交通指挥灯.

实例5 出生的婴儿可能是男，也可能是女.

实例6 明天的天气可能是晴， 也可能是多云或雨.

注 **随机现象的特征：** 条件不能完全决定结果.

（一） 随机现象

概率论就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

说明

随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有一定的统计规律性，概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

（二） 随机试验

为研究随机现象的统计规律性而进行的各种科学实验或对事物某种特征进行的观察称为**随机试验.简称试验，记为*E***

在概率论中，随机试验具有以下三个特征

1. 重复性：可以在相同的条件下重复地进行;

2. 明确性：每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果;

3. 随机性：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

说明

1. 随机试验简称为试验，是一个广泛的术语. 它包括各种各样的科学实验，也包括对客观事物进行的“调查”、“观察”或“测量”等.

实例 “抛掷一枚硬币，观察字面，花面出现的情况”.

分析.

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果：字面、花面;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

故为随机试验.

同理可知下列试验都为随机试验.

E_1. 抛掷一枚骰子, 观察出现的点数;

E_2. 从一批产品中, 依次任选三件, 记录出现正品与次品的件数;

E_3. 从一批灯泡中任取一只, 测试其寿命.

E_4. 考察某地区 10 月份的平均气温;

1. 基本概念

随机事件　随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件，简称事件.

实例　抛掷一枚骰子，观察出现的点数.

试验中，

骰子“出现1点”，“出现2点”，……，“出现6点”，

“点数不大于4”，“点数为偶数”　等都为随机事件.

（三） 随机事件

基本事件　由一个样本点组成的单点集.

实例　“出现1点”，“出现2点”，……，“出现6点”.

必然事件　随机试验中必然会出现的结果.

实例　上述试验中 “点数不大于6” 就是必然事件.

不可能事件　随机试验中不可能出现的结果.

实例　上述试验中 “点数大于6” 就是不可能事件.

必然事件的对立面是不可能事件，不可能事件的对立面是必然事件，它们互称为对立事件.

2. 几点说明

((1)) 随机事件可简称为事件，并以大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 来表示事件

例如 抛掷一枚骰子，观察出现的点数.

可设 A = “点数不大于4”，

B = “点数为奇数” 等等.

(2)随机试验、样本空间与随机事件的关系

每一个随机试验相应地有一个样本空间，样本空间的子集就是随机事件.

随机试验 $\longrightarrow$ 样本空间 $\xrightarrow{\text{子集}}$ 随机事件

随机事件
- 基本事件
- 复合事件
- 必然事件
- 不可能事件

必然事件、不可能事件：互为对立事件

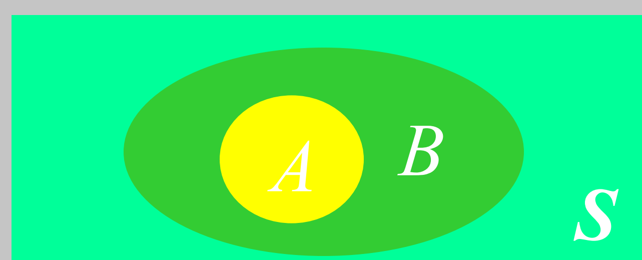
（四） 事件的关系与运算

设试验 E 的样本空间为 Ω, 而 A, B, A_k $(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

1. 包含关系 若事件 A 出现, 必然导致 B 出现，则称事件 B 包含事件 A, 记作 $\boldsymbol{B \supset A}$ **或** $\boldsymbol{A \subset B}$.

实例 “长度不合格” 必然导致 “产品不合格” 所以“产品不合格”包含“长度不合格”.

图示 B 包含 A.

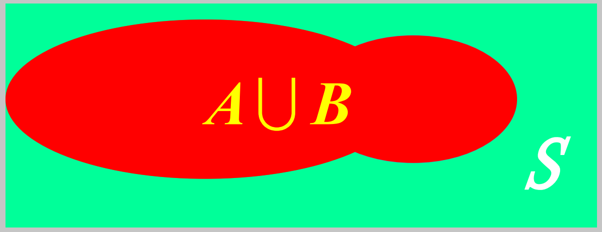


2. **A等于B** 若事件 A 包含事件 B，而且事件B包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

3. **事件 A 与 B 的并(和事件)**

事件 $A\bigcup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$称为事件 A 与事件B的**和事件**.记作$A\cup B$或$A+B$

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定, 因此 “产品不合格”是“长度不合格”与“直径不合格”的并.



推广　称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

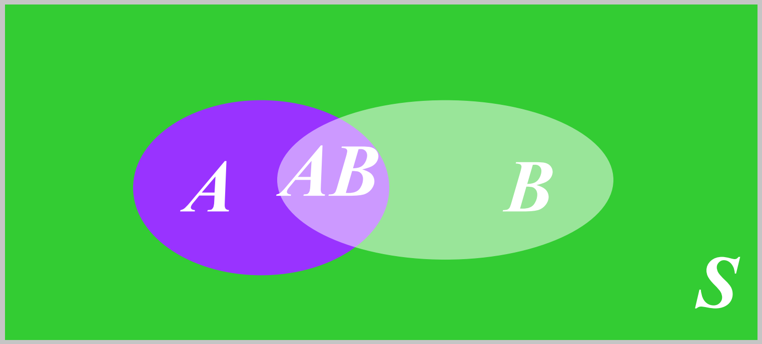
4. 事件 A 与 B 的交（积事件）

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$称为事件 A 与事件 B 的积事件.

积事件也可记作　$A \cdot B$ 或 AB.

实例 某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，因此"产品合格"是"长度合格"与"直径合格"的交或积事件.

图示事件A与B的积事件.



推广　称 $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;

称 $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

和事件与积事件的运算性质

$$A \cup A = A, \quad A \cup S = S, \quad A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cap A = A, \quad A \cap S = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

5. 事件 A 与 B 互不相容（互斥）

若事件 A 的出现必然导致事件 B 不出现，B 出现也必然导致 A 不出现，则称事件 A 与 B 互不相容，即

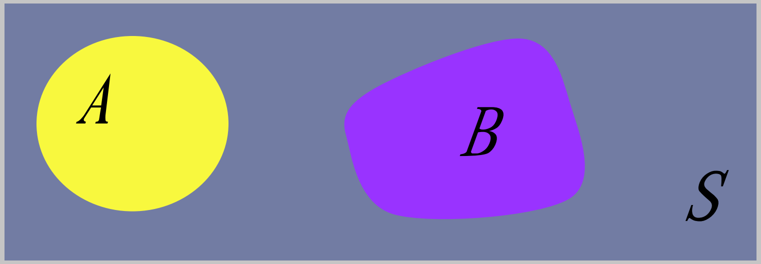
$$A \cap B = AB = \varnothing.$$

实例 抛掷一枚硬币，“出现花面” 与 “出现字面” 是互不相容的两个事件.

实例 抛掷一枚骰子，观察出现的点数 .

“骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{互斥}}$ “骰子出现2点”

图示 A 与 B 互斥.



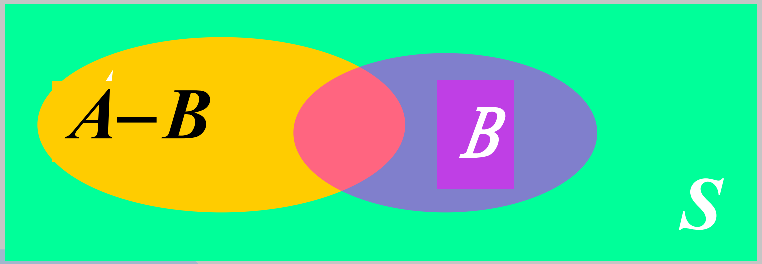
6. 事件 A 与 B 的差

由事件 A 出现而事件 B 不出现所组成的事件称为事件 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

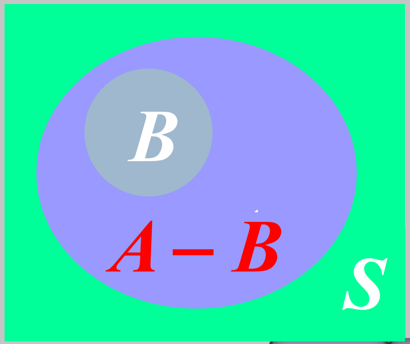
实例 "长度合格但直径不合格" 是 "长度合格" 与 "直径合格" 的差.

图示 A 与 B 的差.

$B \not\subset A$



$B \subset A$

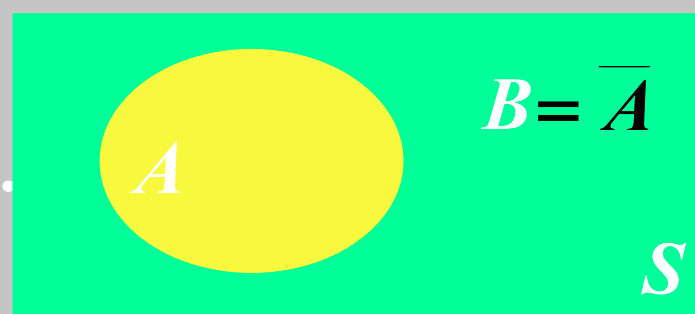


7. 事件 A 的对立事件

设 A 表示“事件 A 出现”，则“事件 A 不出现”称为事件 A 的对立事件或逆事件. 记作 $\overline{A}$.

实例 “骰子出现1点” $\xleftrightarrow{\text{对立}}$ “骰子不出现1点”

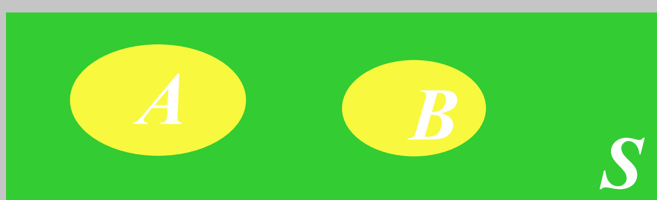
图示 A 与 B 的对立.

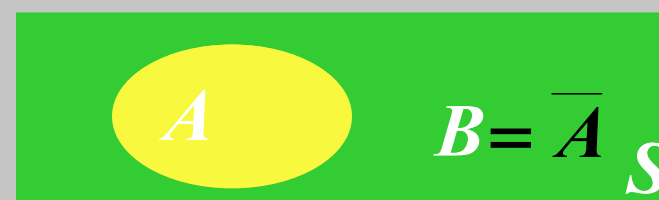


若 A 与 B 互逆，则有 $A \cup B = S$ 且 $AB = \varnothing$.

对立事件与互斥事件的区别

A、B 互斥 $\qquad\qquad$ A、B 对立





$$AB=\varnothing \qquad\qquad A\cup B=S \text{ 且 } AB=\varnothing$$

互 斥 $\underset{\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 对 立

8.完备事件组

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是有限或可列个事件,

如果其满足:

(1) $A_i A_j = \Phi, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots$

(2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一个完备事件组.

显然 A 与 $\overline{A}$ 构成一个完备事件组.

事件间的运算规律 设 A, B, C 为事件, 则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, \ AB = BA.$

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$(AB)C = A(BC).$

(3) 分配律

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = AC \cup BC,$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cup C)(B \cup C).$

(4)德·摩根律： $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

例1 设A, B, C 表示三个随机事件, 试将下列事件用A, B, C 表示出来.

解

(1) A 出现, B, C 不出现;

(2) A, B都出现, C 不出现;

(3) 三个事件都出现;

(4) 三个事件至少有一个出现;

(5) 三个事件都不出现;

(6) 不多于一个事件出现;

(7) 不多于两个事件出现；

(8) 三个事件至少有两个出现；

(9) A, B 至少有一个出现，C 不出现；

(10) A, B, C 中恰好有两个出现.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$; (2) $AB\overline{C}$; (3) ABC;

(4) $A \cup B \cup C$; (5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$;

（四） 事件的关系与运算

(6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}$

$+A\bar{B}C+\bar{A}BC$,

或 $\overline{ABC}$;

(8) $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$;

(9) $(A\cup B)\bar{C}$;

(10) $AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$.

例2 设一个工人生产了四个零件，A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 $(i=1,2,3,4)$，试用 A_i 表示下列各事件：

(1) 没有一个是次品； (2) 至少有一个是次品；

(3) 只有一个是次品； (4) 至少有三个不是次品；

(5) 恰好有三个是次品； (6) 至多有一个是次品.

解 (1) $A_1A_2A_3A_4$;

$$(2)\ \overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$$

$$+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4+A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}$$

$$+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4+A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}$$

$$+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4},$$

或 $\overline{A_1A_2A_3A_4}$;

$$(3)\ \overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4};$$

$$(4)\ \overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$$

$$+A_1A_2A_3A_4;$$

(5) $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}$
$+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$;

(6) $\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1A_2A_3\overline{A_4}$
$+A_1A_2A_3A_4$.

1.2 概率

（一） 概率的统计定义

1.频率的定义

定义1.1 在相同的条件下将试验 E 重复 n 次，设在这 n 次试验中事件 A 发生了 μ 次则称比值

$$f_n(A) = \frac{m}{n}$$

为事件A在这n次试验中发生的频率． 其中 μ 称为频数。

2.频率的性质

设 A 是随机试验 E 的任一事件，则

(1) $0 \le f_n(A) \le 1$;

(2) $f(\Omega)=1,\ f(\varnothing)=0$;

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k).$$

（一） 概率的统计定义

实例 将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做7 遍，观察正面出现的次数及频率.

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	f	n_H	f	n_H	f
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	[illegible]	[illegible]	249	0.498
3	[illegible]	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	247	0.494
5	1	[illegible]	[illegible]	0.48	251	0.502
6	2	0.4	18	0.36	2[illegible]	[illegible]
7	4	0.8	27	0.54	258	0.516

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较大

随n的增大, 频率 f 呈现出稳定性

在 $\frac{1}{2}$ 处波动较小

波动最小

从上述数据可得

(1) 频率有随机波动性，即对于同样的n，所得的f不一定相同；

(2) 抛硬币次数n较小时，频率f的随机波动幅度较大，但随n的增大，频率f呈现出稳定性. 即当n逐渐增大时频率f总是在 0.5 附近摆动，且逐渐稳定于0.5.

（一） 概率的统计定义

实验者	n	n_H	f
德 · 摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
$K \cdot$皮尔逊	12000	6019	0.5016
$K \cdot$皮尔逊	24000	12012	0.5005

$$f(H) \xrightarrow{n\text{逐渐增大}} \frac{1}{2}.$$

重要结论

频率当n较小时波动幅度比较大，当n逐渐增大时，频率趋于稳定值，这个稳定值从本质上反映了事件在试验中出现可能性的大小. 它就是事件的**概率**.

3.概率的统计定义

定义1.2 在一定条件下，将试验 E 重复进行 n 次，试验次数 n 很大时，如果事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\dfrac{r_n(A)}{n}$ 在某一数值 p 附近摆动，并且随着试验次数 n 的不断增大而呈现出一种稳定性。数值 p 的大小反映了事件 A 发生的可能性大小，则称数值 p 为事件 A 发生的概率。记为

$$P(A)=p.$$

（二） 概率的古典定义

1.古典型随机试验

定义1.3 若试验具有下列两个特性:

（1）试验的结果为有限个，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n\}$（有限性

（2）每个结果出现的可能性是相同的，即

$$P(\omega_i)=p=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$（等概性）

则称此试验为**古典型随机试验**

2.概率的古典定义

定义1.4 设古典型试验 E 的样本空间Ω有n个样本点，如果事件A是由其中m个样本点组成，则事件A发生的概率$P(A)$为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

此类事件的概率的数学模型称为**古典概型**

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{组成A的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{\text{A包含的样本点个数}}{\text{样本点总数}}$$

$$=\frac{A\text{的有利场合的数目}}{\text{样本点总数}}$$

2.概率的古典定义

例1 同时抛掷两枚硬币，求下落后恰有一枚正面朝上的概率

解 设A表示恰有一枚正面向上，则

$\Omega=\{$（正，正）、（正，反）、（反，正）、（反，反）$\}$

$A=\{$（正，反）、（反，正）$\}$

$$m=2,n=4 \text{显然} P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$$

2.概率的古典定义

例2 设盒中有 5 只相同的玻璃杯, 其中有 3 只正品, 两只次品, 从中任取两只, 求取出的两只都是正品的概率

解 设A表示取出的两只都为正品，则

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

2.概率的古典定义

例3 从 10 件产品(其中 2 件次品 8 件正品)之中任取 3 件, 求这 3 件产品中

（1）恰有 2 件次品的概率；（2）至多有 1 件次品的概率.

解 设 A={恰有 2 件次品}, B={至多有 1 件次品}. 从 10 件产品之中任取 3 件共有C_{10}^3种取法, 即$n=C_{10}^3$, 事件A包含的样本点个数$m_1=C_2^2C_8^1$, 事件 B 包含的样本点个数$m_2=C_2^1C_8^2+C_2^0C_8^3$, 则

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{15},P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{C_2^1C_8^2+C_2^0C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$$

2.概率的古典定义

例4 从 10 件产品(其中 2 件次品 8 件正品)之中任取 3 件观测后放回，共取 3 次，求这 3 件产品中

（1）恰有 2 件次品的概率；（2）至多有 1 件次品的概率.

解 设 A={恰有 2 件次品}，B={至多有 1 件次品}. 从 10 件产品之中任取 3 件共有 $n=10^3$ 种取法，事件 A 包含的样本点个数 $m_1=3\times2^2\times8$，事件 B 包含的样本点个数 $m_2=3\times2\times8^2+8^3$，则

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{3\times2^2\times8}{10^3}=\frac{12}{125},\quad P(B)=\frac{m_2}{n}=\frac{3\times2\times8^2+8^3}{10^3}=\frac{112}{125}$$

2.概率的古典定义

例5 设袋中有 10 个外型相同的球(6 个红球 4 个白球)，任取 3 个，试求：

(1) 取出 3 个球都是红球的概率；

(2) 取出 3 个球恰有 1 个白球的概率.

解 从 10 个中任取 3 个共有C_{10}^3种取法，即$n=C_{10}^3$

(1) 设A={取出的 3 个球都是红球}，事件A包含的样本点个数

$$m_A=C_6^3,\ 则 P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$$

(2) 设B={取出的 3 个球恰有 1 个白球}. 事件B包含的样本点

个数$m_B=C_4^1C_6^2$，则$P(A)=\dfrac{m_B}{n}=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$

1.几何型试验

定义1.5 若试验具有下列两个特性：

（1）试验的结果为无限不可数

（2）每个结果出现的可能性是均匀的

则称此试验为**几何型试验**

（一） 概率的几何定义

1.概率的几何定义

定义1.6 在几何概型 E 中，事件A发生（指点落入区域 A 中）的概率

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}.$$

其中，$L(A)$与$L(\Omega)$分别是A与Ω的几何度量.

此类事件的概率的数学模型称为**几何概型**.

2.概率的几何定义

例6 **候车问题** 某地铁每隔 5 分钟有一列车通过，在乘客对列车通过该站时间完全不知道的情况下，求每一个乘客到站候车时间不多于 2 分钟的概率.

解 设 A={每一位乘客候车时间不多于2分钟}. 每一位乘客到达时间 t 可以看成是均匀出现在长为 5 分钟的时间区间上的随机点，即 $\Omega=[0,5)$，显然 $A=[3,5)$，则

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{2}{5}$$

2.概率的几何定义

例7 **会面问题** 甲、乙二船约定在一昼夜到达码头的时间是等可能的，两船停泊的时间都是两小时在码头会面，求二船会面的概率.

解 设甲、乙二人到达码头的时刻分别为x和y（$0\le x,y\le 24$）

于是观察两船到达码头的时刻相当于向平面区域

$$\Omega=\{(x,y):\ 0\le x\le 24, 0\le y\le 24\}$$ 等可能投点

因为二人会面的充要条件是$|x-y|\le 2$，所以二人会面相当于点落入

$$A=\{(x,y):|x-y|\le 2, 0\le x,y\le 24\}$$

故 $$P(A)=L(A)/L(\Omega)=(24^2-22^2)/24^2=1-(11/12)^2.$$

1.概率的公理化定义

定义1.7 设E是随机试验，Ω是它的样本空间，对于 E 的每一个事件A赋予一个实数，记为$P(A)$. 若$P(A)$满足下列三个条件：

（1） 非负性：对每一个事件 A，有$0 \le P(A) \le 1$

（2） 规范性：$P(\Omega)=1$；

（3）可列可加性：对任意可列个两两不相容的事件$A_1, A_2, \cdots$，有

$$p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$$

其中，对任意给定的具体事件A，函数值$P(A)$称为事件A的概率.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2.概率的性质

性质1 $P(\Omega) = 0.$

性质2 （有限可加性） 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容（即 $A_i A_j = \varnothing, i \neq j$），则

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i);$$

性质3 $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$

2.概率的性质

性质4 若 $A \supset B$， 则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

性质5 设 A,B 是任意两个事件，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

称之为**加法公式**

n 个事件的加法公式：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n} P(A_i A_j)$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} p(A_i A_j A_k)-\cdots+(-1)^{n-1} p(A_1\cdots A_n).$$

2.概率的性质

例8 一批产品有 12 件，其中有 4 件次品，8 件正品，现从中任取 3 件，试求 3 件中有次品的概率.

解 12 件产品中任取 3 件，样本点总是为 $n=C_{12}^3$，

设 $A=$ {取出的 3 件中有次品}，

$A_i=$ {取出的 3 件中有 i 件次品}， $i=1,2,3$

显然 A_1,A_2,A_3 两两互斥，他们包含的样本点数分别为 $m_{A_1}=C_4^1C_8^2$，$m_{A_2}=C_4^2C_8^1, m_{A_3}=C_4^3$，由事件的关系与运算知， $A=A_1+A_2+A_3$， 故

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_4^1C_8^2}{C_{12}^3}+\frac{C_4^2C_8^1}{C_{12}^3}+\frac{C_4^3}{C_{12}^3}=\frac{41}{55}$$

法 2： $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_8^3}{C_{12}^3}=\dfrac{41}{55}$

2.概率的性质

例9 设A,B,C是3个随机事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,

$P(AB)=P(CB)=0, P(AC)=\frac{1}{8}$,求$A,B,C$至少有一个发生的概率

解 $D=\{A,B,C$ 至少有一个发生$\}$，则$D=A+B+C$，

$P(D)=P(A+B+C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

因为

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(CB)=0, P(AC)=\frac{1}{8}$,

由$P(AB)=0$知$P(ABC)=0$，所以

$P(D)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$

2.概率的性质

例10 从 10 到 99 所有两位数中任取一个数，试求这个数能被 2 或 3 整除的概率

解 从 10 到 99 所有两位数中任取一个数，样本总数为 n=90，
设 A={取出的数能被 2 整除}，B={取出的数能被 3 整除}，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$\frac{45}{90}+\frac{30}{90}-\frac{15}{90}=\frac{2}{3}$$

1.3 条件概率与全概公式

例1 从 100 个圆柱形零件中有 95 个长度合格，有 93 个直径合格，有 90 个两个指标都合格，从中任取一件，讨论在长度合格的前提下，直径也合格的概率。

解

设 A={任取一件，长度合格}，B={任取一件，直径合格}，AB={任取一件，长度直径都合格}，则

$n=C_{100}^{1},m_A=C_{95}^{1},m_B=C_{95}^{1},m_{AB}=C_{90}^{1}$。

长度合格的情况下直径也合格的概率 $P_{S_A}(B)=\dfrac{m_{AB}}{m_A}=\dfrac{90}{95}=\dfrac{18}{19}$

$P_{S_A}(B)$ 一般记为 $P_S(B|A)$，简记为 $P(B|A)$

(一) 条件概率与乘法公式

1.条件概率的定义

定义1.8 设A、B是给定的两个事件，$P(A)>0$, 则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件A发生的条件下, 事件B发生的条件概率.

类似地，可定义

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad (P(B)>0)$$

2.乘法公式

将公式$P(B \mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$改写为

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A),(P(A)>0)$$

称为**乘法公式**。

类似地，可得到下述乘法公式

$$P(AB)=P(B)P(A \mid B),(P(B)>0)$$

2.乘法公式

例2 从 100 件产品中（其中 5 件次品），无放回抽取两件，问第一次取到正品而第二次取到次品的概率。

解

设A={第一次取到正品}，B={第二次取到次品}，

$$P(A)=\frac{95}{100}\neq 0$$

$$P(B|A)=\frac{5}{99}$$

2.乘法公式

例3 某人忘记电话号码的最后一个数字，因而任意按最后一个数，试求：

(1) 不超过四次能打通电话的概率；

(2) 若已知最后一位是偶数，则不超过三次能打通电话的概率。

解 （1）设 A={不超过 4 次打通电话}，A_i={第i次打通电话}，$i=1,2,3,4.$ $A=A_1+A_2+A_3+A_4$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=P(\overline{A_1+A_2+A_3+A_4})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})P(\overline{A_4}|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$$

$$=1-\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{7}=\frac{2}{5}$$

2.乘法公式

例3 某人忘记电话号码的最后一个数字，因而任意按最后一个数，试求

（1）不超过四次能打通电话的概率；

（2）若已知最后一位是偶数，则不超过三次能打通电话的概率。

解 （2）设B={已知最后一位是偶数，不超过三次能打通电话}，B_i={已知最后一位是偶数，第i次打通电话}，

$i=1,2,3$. $B=B_1+B_2+B_3$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=P(\overline{B_1+B_2+B_3})=1-P(\overline{B_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3})$$

$$=1-P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}\mid\overline{B_1})P(\overline{B_3}\mid\overline{B_1}\,\overline{B_2})$$

$$=1-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

定理1.1 设试验E的样本空间为Ω, 事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$为一个完备事件组, $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对任一事件B, 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\mid A_i)P(A_i)$$

称此式为**全概率公式**

（二） 全概公式与逆概公式

证明

$$B = B\Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

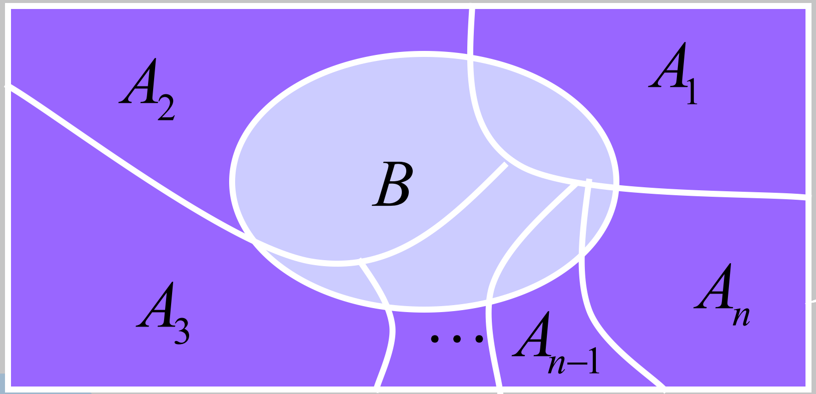
$$= BA_1 \cup BA_2 \cup \cdots \cup BA_n.$$

由 $A_iA_j = \varnothing \quad \Rightarrow (BA_i)(BA_j) = \varnothing$

$$\Rightarrow P(A) = P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n)$$

$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n).$$

图示



化整为零
各个击破

例4 一商店出售某公司三分厂生产的同型号的产品，三分厂生产的比例为 3:1:2，他们的不合格率依次为 1%, 12%, 5%. 某顾客从这些商品中任购一件，试求顾客购到不合格产品的概率.

解 12 件产品中任取 3 件，样本点总是为$n = C_{12}^3$，

设 B = {顾客购到不合格产品}，

A_i = {顾客购到地 i 分厂生产的不合格产品}，$i = 1, 2, 3$

$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_1) = \frac{1}{6}, P(A_3) = \frac{1}{3}$，显然 A_1, A_2, A_3 是样本空间的一个划分

$P(B|A_1) = 0.01, P(B|A_2) = 0.12, P(B|A_3) = 0.05,$

由全概率公式得：

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.01 + \frac{1}{6} \times 0.12 + \frac{1}{3} \times 0.05 = \frac{1}{24}$$

(二) 全概公式与逆概公式

例5 第一个箱子有 10 个球, 其中 8 个白球; 第一个箱子有 20 个球, 其中 4 个白球. 现从每箱中任取一球, 然后从 2 球中任取一球, 取到白球的概率是多少?

解 A_i={取出的球是第i箱的}， $i=1,2, P(A_1)=\frac{1}{2}, P(A_2)=\frac{1}{2}$

B={取出的球是白球}则

$P(B|A_1)=8/10, P(B|A_2)=4/20,$

由全概率公式得:

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{20}=\frac{1}{2}$$

（二）全概公式与逆概公式

定理1.1 设试验E的样本空间为Ω，$A_1A_2,\cdots,A_n$为一个完备事件组，且$P(A_i)>0$，则对E的任意事件$B(P(B)>0)$有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

称此为**贝叶斯公式、逆概公式**

（二） 全概公式与逆概公式

例6 设某人从外地赶来参加紧急会议，他乘火车、轮船、汽车或飞机来的概率是 3/10, 1/5, 1/10, 2/5, 如果他乘飞机来，不会迟到；而乘火车、轮船或汽车来迟到的概率分别为 1/4, 1/3, 1/12, 已知此人迟到，试推断他是怎样来的？

解 $A_1=\{乘火车\}$，$A_2=\{乘轮船车\}$，$A_3=\{乘汽车\}$，$A_4=\{乘飞机\}$，

$B=\{迟到\}$，$P(A_1)=\dfrac{3}{10}, P(A_2)=\dfrac{1}{5}, P(A_3)=\dfrac{1}{10}, P(A_4)=\dfrac{2}{5}$

$P(B|A_1)=1/4, P(B|A_2)=1/3, P(B|A_3)=1/12, P(B|A_4)=0,$

由逆概公式：

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

$P(A_1|B)=1/2, P(A_2|B)=4/9, P(A_3|B)=1/18, P(A_4|B)=0,$

由此可推断此人乘火车的可能性最大

1.4 事件的独立性与伯努利概型

(一) 事件的独立性

(二) 伯努利概型

（一） 事件的独立性

1.两个事件相互独立的定义

定义1.9 对于事件A和B，如果

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

则称事件 A,B 相互独立，简称 A,B 独立.

1.两个事件相互独立的定义

定理1.3（相互独立的充要条件）

设 A, B 是两事件,且 $P(A)>0$. 则 A, B 相互独立的充要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

证明

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B).$$

同理可证：$P(B)>0$, 则 A, B 相互独立的充要条件是 $P(B|A)=P(B)$.

1.两个事件相互独立的定义

定理1.4 下列命题等价：

（1）事件A与B相互独立；

（2）事件A与$\overline{B}$相互独立；

（3）事件$\overline{A}$与B相互独立；

（4）事件$\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立；

证明 事件A与B相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$$

$$=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(\overline{B})$$

$\Leftrightarrow A$与$\overline{B}$相互独立

2.三个事件相互独立的定义

定义1.10 设 A、B、C是三个事件, 若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$
$$P(BC) = P(B)P(C)$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A、B、C**相互独立**, 简称独立.

3.n个事件相互独立的定义

定义1.11 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是 n 个事件，如果对任意的 k （$2\leqslant k\leqslant n$）及$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称$A_1,A_2,\cdots,A_n$**相互独立**，简称独立.

（一） 事件的独立性

例2 设袋中有 4 个乒乓球，其中 1 个涂有白色，1 个涂有红色，1 个涂有蓝色，1 个涂有白、红、蓝三色，从袋中任取一个球，设 $A=\{$取出的球涂有白色$\}$，$B=\{$取出的球涂有红色$\}$，$C=\{$取出的球涂有蓝色$\}$，试验证事件 A、B、C 相互独立，但三者不独立。

解

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{1}{4}$$

$P(AB)=P(A)P(B)$，则事件 A、B 相互独立。

类似可证，事件 A、C 相互独立，事件 B、C 相互独立。

$$P(C)=\frac{1}{2},P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8},P(ABC)=\frac{1}{4},$$

$P(A)P(B)P(C)\neq P(ABC)$，则 A、B、C 不相互独立

例3 设有甲乙两个射手，他们每次击中目标的概率是 0.8 和 0.7，现两人同时向同一目标射击一次，试求：

（1）目标被击中的概率；

（2）若已知目标被击中，则它是被甲击中的概率。

解 $A=\{$甲命中目标$\}$，$B=\{$乙命中目标$\}$，$C=\{$命中目标$\}$，

（1）$C=A+B$，而 $P(A)=0.8, P(B)=0.7,$

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$
$$=0.8+0.7-0.56=0.94$$

（2）$AC\subset A$ 于是

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)}{P(C)}=\frac{0.8}{0.94}=\frac{40}{47}$$

（一） 事件的独立性

例4 用高射炮射击飞机，每门高射炮击中飞机的概率是 0.6，试问：

（1）两门高射炮同时射击，飞机被击中的概率是多少；

（2）若有一架敌机入侵，需要多少门高射炮同时射击才能以 99%的概率命中敌机？

解 （1）$A=\{$击中敌机$\}$，$B_i=\{$第 i 门高射炮击中敌机$\}$ $i=1,2$，$P(B_1)=P(B_2)=0.6, P(\overline{B_1})=P(\overline{B_2})=0.4,$

$$P(C)=P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B_1}\,\overline{B_2})=1-P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})$$

$$=1-0.4\times 0.4=0.84$$

（2）$99\%=1-4^n$，即 $4^n=0.01$，于是

$$n=\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}=\frac{-2}{-0.3979}\approx 5.026,$$

1.n重伯努利试验

定义1.12 在 n 次独立重复试验中，若每次试验只有两个结果：A 与 $\overline{A}$，且在每次试验中 $P(A) = p$ $(0<p<1)$，则称这 n 次重复独立试验为 n 重贝努里试验，相应的数学模型称为贝努里概型.

（二） 伯努利概型

1.n重伯努利试验

例5 某人打靶每次命中的概率是0.7,,现独立重复射击5次,问恰好命中两次的概率是多少?

解 $C_5^2 \cdot (0.7)^2(1-0.7)^{5-2} = 0.1323,$

（二） 伯努利概型

2.伯努利概型

定理1.5 设 E^n 是 n 重贝努里试验，在每一次试验中 $P(A) = p$, $0<p<1$. 则在这个 n 重贝努里试验中事件 A 发生 k 次的概率为

$$P_n(\mu = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

上式叫贝努里公式.

证明 由贝努里试验的定义知，A 在任何指定的 m 次发生而在其余的 n—m 次不发生的概率都是 $p^m(1-p)^{n-m}$，而这样的指定方式共有 C_n^m 种. 故事件 A 在 n 重贝努里试验中发生 m 次的概率为

$$P_n(\mu = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

2.伯努利概型

例6 某车间有 5 台某型号的机床，每台机床由于种种原因（如装卸工件，更换刀具等）时常需要停车，设各台机床停车或开车是相互独立的。若台机床在任意处于停车的概率是1/3，试求在任意时刻，

(1)恰有一台机床处于停车状态的概率；

（2）至少有一台机床处于停车状态的概率；

（3）至多恰有一台机床处于停车状态的概率；

2.伯努利概型

例6

解

（1）A=｛任一时刻任一台机床处于停车状态｝，则

$$P(A)=\frac{1}{3},\text{而}P(\overline{A})=\frac{2}{3},\text{由二项概型有}$$

$$P_5(\mu=1)=C_5^1\cdot(\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})^4\approx 0.3292,$$

（2）B=｛至少有一台机床处于停车状态｝，则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P_5(\mu=0)=1-C_5^0\cdot(\frac{1}{3})^0(1-\frac{1}{3})^5\approx 0$$

（3）C=｛至多有一台机床处于停车状态｝，则

$$P(C)=P_5(\mu=0)+P_5(\mu=1)\approx 0.4609.$$