第二章

随机变量及其分布

2.1 随机变量与分布函数

（一）随机变量的概念

（二）分布函数

（一） 随机变量的概念

为什么引入随机变量

概率论是从数量上来研究随机现象内在规律性的，为了更方便有力的研究随机现象，就要用数学分析的方法来研究， 因此为了便于数学上的推导和计算，就需将任意的随机事件数量化. 当把一些非数量表示的随机事件用数字来表示时， 就建立起了随机变量的概念.

（一） 随机变量的概念

实例 抛掷骰子，观察出现的点数.

则有

样本空间{1，2，3，4，5，6}

样本点本身就是数量

$X(\omega)=\omega$ 恒等变换

$$X(1)=1, X(2)=2, X(3)=3, X(4)=4, X(5)=5, X(6)=6,$$

且有 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{6} \quad (i=1,2,3,4,5,6).$

（一） 随机变量的概念

例1 掷一个硬币，观察出现的面 ，共有两个结果:

$\omega_1 = $(反面朝上),

$\omega_2 = $(正面朝上),

若用 X 表示掷一个硬币出现正面的次数，则有

$\omega_1 = $(反面朝上) $\xrightarrow{X(\omega)}$ 0 $\rightarrow X(\omega_1) = 0$

$\omega_2 = $(正面朝上) 1 $\rightarrow X(\omega_2) = 1$

$X(\omega)$ 是一个随机变量.

（一） 随机变量的概念

例2 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8，现该射手不断向目标射击，直到击中目标为止，则

$$X(e) = \text{所需射击次数},$$

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots\quad .$$

（一） 随机变量的概念

例3 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，如果某人到达该车站的时刻是随机的，则

$$X(e) = \text{此人的等车时间},$$

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为: $[0, 5]$.

（一） 随机变量的概念

定义2.1 **随机变量**

在条件 S 下，随机试验的每一个可能结果 ω $\{X \le x\}$都是一个实数 $X=X(\omega)$来表示，且 X 满足：

（1） X 由 ω 唯一确定；

（2）对于任意给定的实数 x，事件$\{X \le x\}$都是有概率的，

则称 X 是一个**随机变量（random variable）**

用字母 $\xi,\eta,\varsigma\cdots\cdots$ 或 $X,Y,Z,\cdots$ 表示,简记为 **R.V.**

说明 **(1) 随机变量与普通的函数不同**

随机变量是一个函数，但它与普通的函数有着本质的差别，普通函数是定义在实数轴上的，而随机变量是定义在样本空间上的（样本空间的元素不一定是实数）.

(2) 随机变量的取值具有一定的概率规律

随机变量随着试验的结果不同而取不同的值，由于试验的各个结果的出现具有一定的概率，因此随机变量的取值也有一定的概率规律.

(3)随机变量与随机事件的关系

随机事件包容在随机变量这个范围更广的概念之内. 或者说：随机事件是从静态的观点来研究随机现象, 而随机变量则是从动态的观点来研究随机现象.

随机变量的分类

按随机变量的取值范围:

- 随机变量
  - 离散型
  - 非离散型
    - 连续型
    - 混合型

按描述问题所需变量个数:

- 随机变量
  - 一维
  - 多维
    - 二维
    - 三维...

(一) 随机变量的概念

离散型　随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个，叫做离散型随机变量.

实例　观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是： 1, 2, 3, 4, 5, 6.

连续型　随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例　随机变量 X 为"灯泡的寿命".

则 X 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

（二） 分布函数

概念的引入

对于随机变量X，我们不仅要知道X取哪些值，要知道 X 取这些值的概率；而且更重要的是想知道 X 在任意有限区间(a, b)内取值的概率.

例如 求随机变量 X 落在区间 $(x_1, x_2]$ 内的概率.

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = \boxed{P\{X \le x_2\}} - \boxed{P\{X \le x_1\}}$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad\quad\quad}_{?}$$

$$F(x_2) \qquad\qquad F(x_1) \longrightarrow \text{分布函数}$$

$$P\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

（二）分布函数

定义2.1 分布函数

设X是随机变量，对任意实数x，令

$$F(x)=P(X\le x), x\in(-\infty,+\infty)$$

则称函数$F(x)$是为随机变量X的**分布函数**

说明

(1) 分布函数主要研究变量在某一区间内取值的概率.

(2)分布函数 $F(x)$ 是 x 的一个普通实函数.

（二） 分布函数

定理2.1 分布函数的性质

设随机变量X的分布函数是$F(x)$，则

（1）$F(x)$是单调不减函数，即$x_1 < x_2$时，有$F(x_1) \leq F(x_2)$；

（2）$F(x)$是非负有界，即$0 \leq F(x) \leq 1$，且$F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

（3）$F(x)$是右连续函数，即$F(x+0) = F(x)$.

（二） 分布函数

重要公式

(1) $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$,

(2) $P\{X > a\} = 1 - F(a)$.

证明 因为 $\{X \le b\} = \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\}$,

$$\{X \le a\} \cap \{a < X \le b\} = \varnothing,$$

所以 $P\{X \le b\} = P\{X \le a\} + P\{a < X \le b\}$,

故 $P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$.

例4 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} a+be^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

求常数a,b及概率 $P(|X|<2)$.

解 $F(x)$设随机变量X的分布函数，则有

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1,\quad 故 \lim_{x\to+\infty}(a+be^{-x})=a=1.$$

（二） 分布函数

$F(x)$在$x=0$右连续，即$F(0+0)=F(0)=0$,

即$a+b=0$,， 则$b=-a=-1$， 所以

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$P(|X|<2)=P(<-2<X<2)=F(2)-F(-2)$$

$$=1-e^{-2}.$$

2.2 离散型随机变量及其分布

（一）离散型随机变量的分布

（二）几种常见的离散型随机变量的分布

1.分布律定义

定义2.3 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k ($k=1,2,\cdots$), X 取各个可能值的概率，即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率，为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots.$$

称此为离散型随机变量 X 的分布律.

1.分布律定义

离散型随机变量的分布律也可表示为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

分布阵

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

分布列

(一) 离散型随机变量的分布

或

2.分布律性质

性质1 $p_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots;$

性质2 $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

例1 设随机变量X的分布列如下表所示：

X	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_k)$	a	$3a$	$1/8$	a	$2a$

求：（1）常数 a

$(2)\,P(X<1), P(-2<X\le 0), P(X\ge 2).$

例1

解

（1）由分布列的性质知：

$$a+3a+1/8+a+2a=1$$

因此$a=1/8$

$$(2)\,P(X<1)=P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)=5/8;$$

$$P(-2<X\le 0)=P(X=-1)+P(X=0)=1/2;$$

$$P(X\ge 2)=P(X=2)=1/4.$$

例4 从 5 件产品(其中 2 件次品, 3 件正品)中任取 2 件, 用 X 表示其中的次品数, 写出 X 的分布律, 写出分布函数 $F(x)$, 并画出其图形.

解 随机变量 X 表示任意取出两件产品中的次品数, X 的取值为 0, 1, 2, 它们的概率分别为:

$$P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3,$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=0.6,$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=0.1,$$

则X的分布律为

$$P(X=k)=\frac{C_2^kC_3^{2-k}}{C_5^2}(k=0,1,2)$$

（一） 离散型随机变量的分布

当$x<0$时， $F(x)=P(X\le x)=0$；

当$0\le x<1$时，

$F(x)=P(X\le x)=P(X=0)=0.3;$；

当$1\le x<2$时，

$F(x)=P(X\le x)=P(X=0)+P(X=1)=0.9;$；

当$x\ge 2$时，

$$F(x)=P(X\le x)$$

$$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1;$$

$$分布函数 F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\le x<1,\\ 0.9, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

（二）几种常见的离散型随机变量的分布

1.0-1分布

设随机变量*X* 只可能取0与1两个值，它的分布律为

X	0	1
P_k	$1-p$	p

则称*X* 服从**(0-1)分布**或**两点分布**. 记为 $X \sim B(1,p)$

1.0-1分布

实例 200件产品中，有190件合格品，10件不合格品，现从中随机抽取一件，那么，若规定

$$X=\begin{cases}1, & \text{取得不合格品,}\\ 0, & \text{取得合格品.}\end{cases}$$

X	0	1
p_k	$\dfrac{190}{200}$	$\dfrac{10}{200}$

则随机变量 X 服从0-1分布.

（二）几种常见的离散型随机变量的分布

2.二项分布

设随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n;\ 0<p<1,\ q=1-p),$$

则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布，记为 $X \sim B(n,p)$.

对于二项分布，由于 $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ 恰好是二项式 $(p+q)^n$ 的展开式中的通项，所以

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1,$$

因为 P(X=k) 与二项式有关，二项分布因此而得名.

（二）几种常见的离散型随机变量的分布

2.二项分布

例 3　设某射手每次射击打中目标的概率为 0.5，现在连续射击 10 次，求击中目标的次数 X 的概率分布；又设至少命中 3 次才可以参加下一步的考核，求此射手不能参加考核的概率.

解　这是一个 10 重伯努利试验，击中目标的次数 X 的可能取值为 0，1，2，⋯，10，利用二项概型可求得

$$P(X=k)=C_{10}^{k}0.5^{k}0.5^{10-k},\quad k=0,1,2,\cdots,10,$$

即 $X\sim B(10,0.5)$.

设 A={此射手不能参加考核}，有

$$P(A)=P(X\le 2)=\sum_{k=0}^{2}P(X=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{2}C_{10}^{k}0.5^{k}0.5^{10-k}=0.0546875.$$

2.二项分布

例 4　某人进行射击，每次击中目标的概率为 0.01，问：独立射击 400 发时，击中目标的最可能成功次数是多少并求该次数对应的概率.

解　显然独立射击 400 发中击中目标的次数 X 服从参数 n=400，p=0.01 的二项分布.

由上面的讨论可知，击中目标的最可能成功次数 =[(n+1)p]=[4.01]=4，而相应发生的概率为

$$\square_{400}(4)=C_{400}^{4}\times 0.01^{4}\times 0.99^{396}\approx 0.19635.$$

3.泊松分布

设随机变量 X 的分布为

$$\square(\square=\square)=\frac{\square^{\square}}{\square!}e^{-\square}\quad (k=0,1,2,\cdots,n,\cdots;\quad \lambda>0),$$

则称 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记为 X~P(λ).

服从泊松分布的随机变量是常见的. 例如，放射性物质在某一段时间内放射的粒子数，某容器内的细菌数，布的疵点数，某交换台的电话呼唤次数，一页书中印刷错误出现的个数等，都服从或近似服从泊松分布.

（二） 几种常见的离散型随机变量的分布

3.泊松分布

定理2.1 (泊松定理) 设随机变量 $X_n(n=1,2,\cdots)$ 服从二项分布，即

$$P(X_n=k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中，$p_n(0<p_n<1)$ 是与 n 有关的数，且设 $np_n=\lambda>0$ 是常数，则有

$$\lim_{n\to+\infty}P(X_n=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

注 二项分布的极限分布为泊松分布.

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

在实际应用中，当 $n\geqslant 20, p\leqslant 0.05$ 时，我们就可采用上述近似公式计算.

3.泊松分布

例 5　设生三胞胎的概率为 10^{-4}，求在 10000 次生育中恰有 2 次生三胞胎的概率.

解　设在 10000 次生育中生三胞胎的次数为 X，则 $X \sim B(10000, 10^{-4})$，故所求概率为

$$P(X=2)=C_{10000}^{2}(0.0001)^{2}(1-0.0001)^{9998}.$$

显然直接计算是麻烦的，故用泊松分布求近似值. 因 $n=10000>20$，$p=0.0001<0.05$，$\lambda=np=1$，故

$$P(X=2)\approx\frac{\lambda^{2}e^{-\lambda}}{2!}=\frac{e^{-1}}{2}\approx 0.1839.$$

（二）几种常见的离散型随机变量的分布

4.几何分布

设随机变量 X 的分布为

$$P(X=k)=pq^{k-1}\quad (k=1,2,\cdots,n,\cdots;\ 0<p<1,\ q=1-p),$$

则称 X 服从参数为 p 的**几何分布**，记为 $X\sim G(p)$.

注： 利用几何级数求和公式容易验证几何分布的概率值 p_k 满足：

$$\sum_{k} p_k=\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}=p\frac{1}{1-q}=1.$$

（二）几种常见的离散型随机变量的分布

4.几何分布

例 6　某射手连续向一目标射击，直到命中为止，已知他每发命中的概率是 0.7，求至少需要 n 次才能射中目标的概率.

解　解法 1　由题意，所需射击次数 X 服从以 p=0.7 为参数的几何分布，而至少需要 n 次才能射中目标的概率为

$$\square(\square \geq \square) = \sum_{\square=\square}^{\infty}(1-\square)^{\square-1}p = (1-p)^{\square-1}p\sum_{\square=0}^{\infty}(1-\square)^{\square}$$

$$= (1-\square)^{\square-1} = 0.3^{\square-1}.$$

解法 2　设 A={至少需要 n 次才能射中目标}，B={前 n-1 次都未射中目标}，我们有 A=B，而每次未能射中目标的概率为 1-p=0.3，所以

$$\square(\square \geq \square) = \square(\square) = (1-\square)^{\square-1} = 0.3^{\square-1}.$$

5.超几何分布

设随机变量 X 的分布为

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=0,1,\cdots,l,$$

其中 $n\leqslant N$, $M<N$, $l=\min\{n,M\}$, n, N, M 均为正整数, 则称随机变量 X 服从参数为 N, M, n 的**超几何分布**, 记作 $X\sim H(N,M,n)$.
产生超几何分布的背景之一是产品的不放回抽样问题.

5.超几何分布

设随机变量 X 的分布为

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=0,1,\cdots,l,$$

其中 $n\leqslant N, M<N, l=\min\{n, M\}$，n, N, M 均为正整数，则称随机变量 X 服从参数为 N, M, n 的**超几何分布**，记作 $X \sim H(N, M, n)$.

产生超几何分布的背景之一是产品的不放回抽样问题.

5.超几何分布

设随机变量 X 的分布为

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\quad k=0,1,\cdots,l,$$

其中 n≤N, M<N, l=min{n, M}, n, N, M 均为正整数, 则称随机变量 X 服从参数为 N, M, n 的**超几何分布,** 记作 X~H(N, M, n).

产生超几何分布的背景之一是产品的不放回抽样问题.

（二） 几种常见的离散型随机变量的分布

5.超几何分布

例 7 从某厂生产的 1000 件产品(其中有 200 件是次品)中，随机抽查 20 件. 令 X 表示这 20 件中次品的件数，求 X 的分布.

解 依题意，这里是不放回抽样，因此，X 应服从超几何分布

$$P(X=k)=\frac{C_{200}^{k}C_{800}^{20-k}}{C_{1000}^{20}},$$

其中， k=0, 1, 2, ···, 20.

若按上式计算，组合数 C_{200}^{k}, C_{800}^{20-k}, C_{1000}^{20} 的计算很不方便

近似地认为： $X\sim B(20, 0.2)$. 于是

$$P(X=k)\approx C_{20}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20-k}\quad (k=0,1,2,\cdots,20).$$

5.超几何分布

定理2.1 (二项定理) 若当 $N\to\infty$ 时, $\frac{\square}{\square}\to p$ (n, k 不变), 则

$$\frac{\square_{\square}^{\square}\ \square_{\square-\square}^{\square-\square}}{\square_{\square}^{\square}}\to\square_{\square}^{\square}\square^{\square}(\square-\square)^{\square-\square}\qquad(\square\to\infty).$$

可见, 超几何分布的极限分布为二项分布.

2.3 连续型随机变量及其分布

（一）概率密度

（二）几种常见的连续型随机变量的分布

连续型随机变量及其概率密度

一、连续型随机变量

二、概率密度的概念与性质

一、连续型随机变量

定义 随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间，叫做连续型随机变量.

实例1 随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

实例2 随机变量 X 为“测量某零件尺寸时的测量误差”.

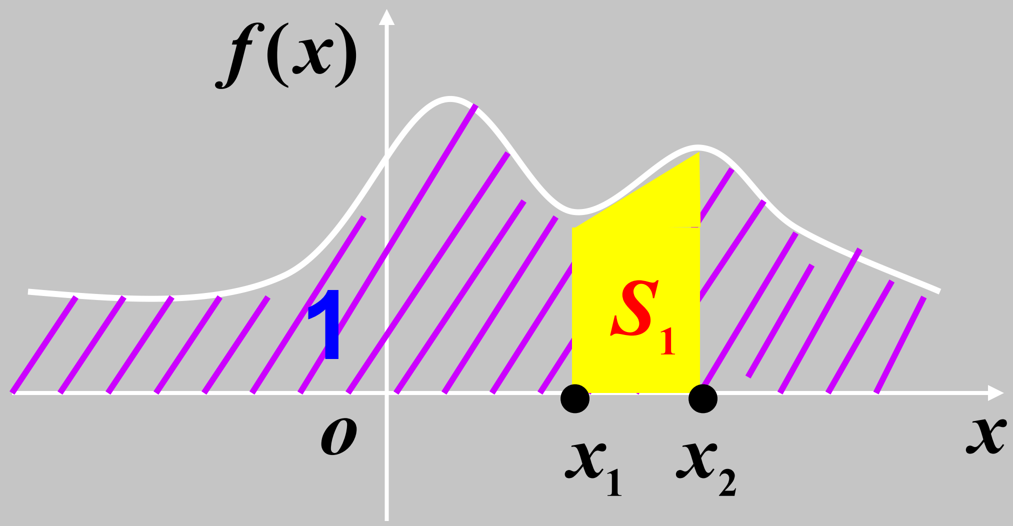
则 X 的取值范围为 (a, b) .

二、概率密度的概念与性质

1.定义 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数，使对于任意实数 x 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$，则称 X 为连续型随机变量，其中 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度.

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$S_1=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$$



性质 (1) $f(x) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$;

证明 $1 = F(\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$

(3) $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$;

证明 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同时得以下计算公式

$$P\{X \le a\} = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$P\{X > a\} = 1 - P\{X \le a\} = 1 - F(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{-\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(4) 若 $f(x)$ 在点 x 处连续,则有 $F'(x) = f(x)$.

注意 对于任意可能值 a ,连续型随机变量取 a 的概率等于零. 即

$$P\{X=a\}=0.$$

证明 $P\{X=a\}=\lim_{\Delta x\to 0}\int_a^{a+\Delta x} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

由此可得

$$\boxed{\begin{aligned} P\{a\le X\le b\} &= P\{a< X\le b\}=P\{a\le X< b\} \\ &= P\{a< X< b\}. \end{aligned}}$$

连续型随机变量取值落在某一区间的概率与区间的开闭无关

注意

若X是连续型随机变量，{ X=a }是不可能事件，则有 $P\{X = a\} = 0.$

若 $P\{X = a\} = 0,$

则不能确定 $\{X = a\}$ 是不可能事件

连续型

若 X 为离散型随机变量，

$\{X = a\}$ 是不可能事件 $\Leftrightarrow P\{X = a\} = 0.$

离散型

例1 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 确定常数 k; (2) 求 X 的分布函数;

(3) 求 $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x=1$,

得 $\int_0^3 kx\,\mathrm{d}\,x+\int_3^4\left(2-\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}\,x=1$, 解之得 $k=\dfrac{1}{6}$.

(2) 由 $k=\frac{1}{6}$ 知 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6}, & 0\le x<3,\\ 2-\frac{x}{2}, & 3\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$ 得

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int_0^x \frac{t}{6}\mathrm{d}t, & 0\le x<3, \\ \int_0^3 \frac{t}{6}\mathrm{d}t+\int_3^x\left(2-\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t, & 3\le x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$

即 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(3) $P\{1<X\le \frac{7}{2}\}=F(\frac{7}{2})-F(1)=\frac{41}{48}.$

例2 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a,\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

求：(1) 系数 A, B 的值;

(2) $P\{-a<X<\dfrac{a}{2}\}$;

(3) 随机变量 X 的概率密度.

解 (1) 因为 X 是连续型随机变量，所以 $F(x)$ 连续，

故有 $$F(-a)=\lim_{x\to -a}F(x),$$

$$F(a)=\lim_{x\to a}F(x),$$

即 $$A+B\arcsin\left(\frac{-a}{a}\right)=A-\frac{\pi}{2}B=0,$$

$$A+B\arcsin\left(\frac{a}{a}\right)=A+\frac{\pi}{2}B=1,$$

解之得 $A=\dfrac{1}{2},\quad B=\dfrac{1}{\pi}.$

所以 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -a,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a<x\le a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$$

(2) $P\left\{-a < X < \dfrac{a}{2}\right\} = F\left(\dfrac{a}{2}\right) - F(-a)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{2a}\right) - 0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}.$$

(3) 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 1\big/\pi\sqrt{a^2 - x^2}, & -a < x < a, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

常见连续型随机变量的分布

1. 均匀分布

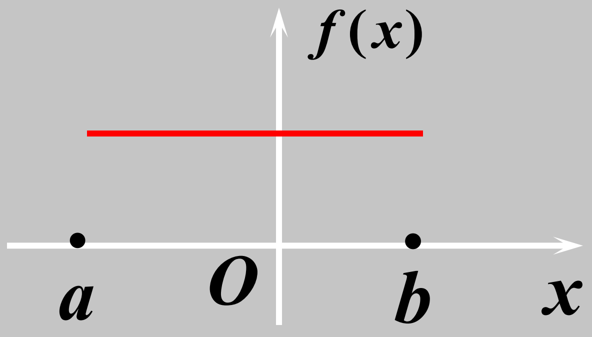
定义　设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 区间上服从均匀分布，

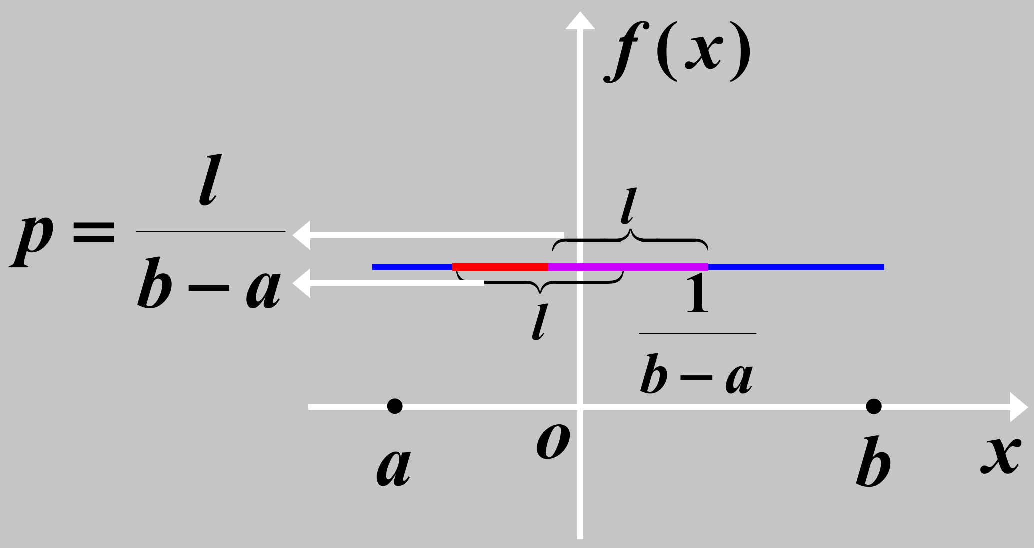
记为　$X \sim U(a,b)$.

概率密度函数图形



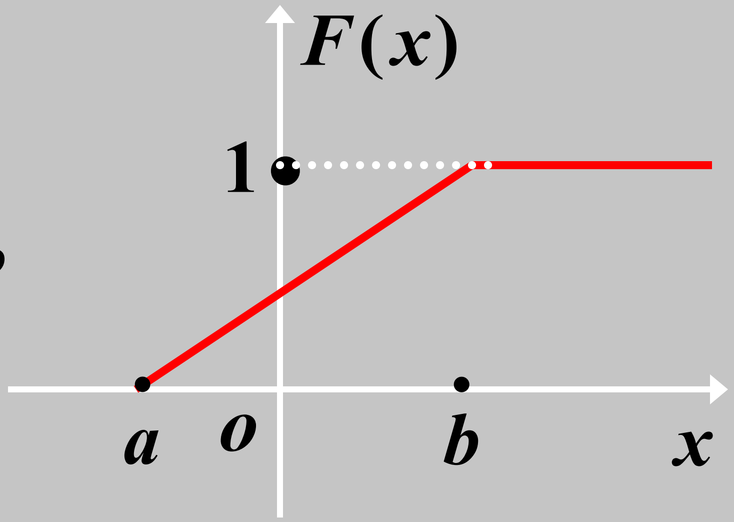
均匀分布的意义

在区间(a,b)上服从均匀分布的随机变量X，落在区间(a,b)中任意等长度的子区间内的可能性是相同的.



分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$



例1 设电阻值 *R* 是一个随机变量，均匀分布在 900 Ω~ 1100 Ω.求 *R* 的概率密度及 *R* 落在 950Ω ~1050 Ω 的概率.

解 由题意，*R*的概率密度为

$$f(r)=\begin{cases}1/(1100-900), & 900<r\le 1100,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故有 $P\{950<R\le 1050\}$

$$=\int_{950}^{1050}\frac{1}{200}\mathrm{d}r=0.5.$$

例2 设随机变量 X 在 $[2, 5]$上服从均匀分布，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于3 的概率.

解 X 的分布密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 2\le x\le 5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 A 表示“对 X 的观测值大于 3 的次数”，

即 $A=\{X>3\}$.

由于 $P(A)=P\{X>3\}=\int_3^5 \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$,

设Y表示3次独立观测中观测值大于3的次数,

则 $$Y \sim b\left(3, \frac{2}{3}\right).$$

因而有

$$P\{Y \geq 2\}=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^0$$

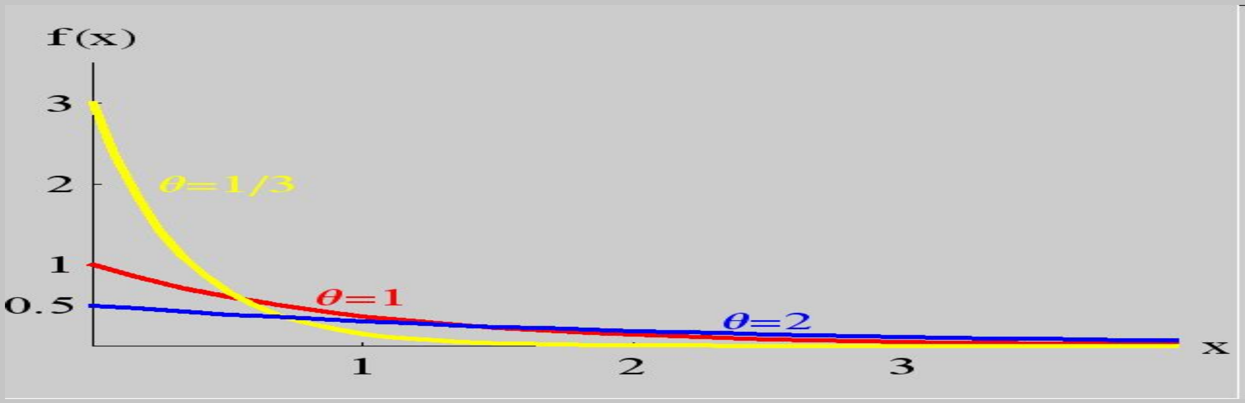
$$=\frac{20}{27}.$$

2. 指数分布

定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为

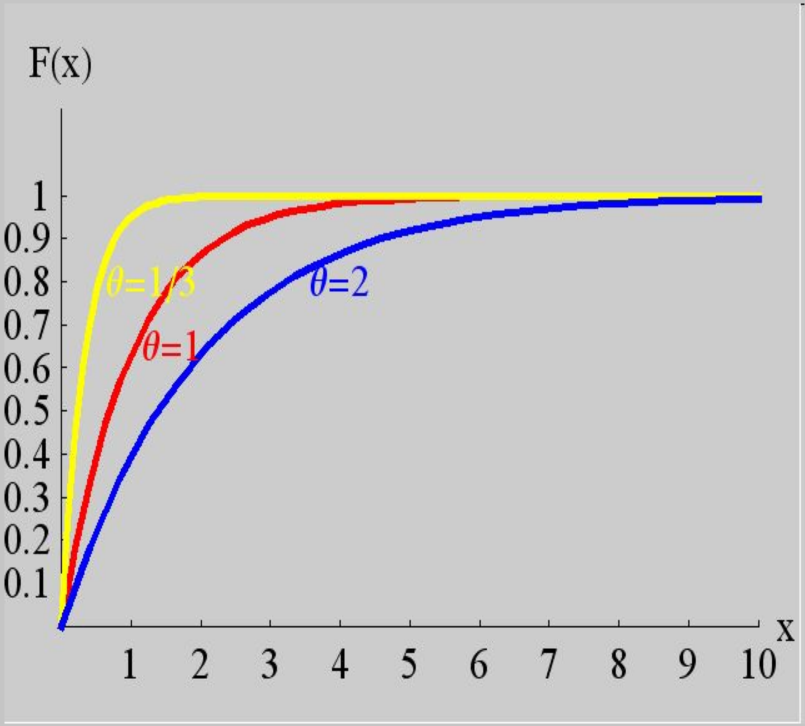
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为常数,则称 X 服从参数为 θ 的指数分布.



分布函数

$$F(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$



应用与背景

某些元件或设备的寿命服从指数分布. 例如无线电元件的寿命 、电力设备的寿命、动物的寿命等都服从指数分布.

例3 设某类日光灯管的使用寿命 X 服从参数为 $\theta=2000$ 的指数分布(单位: 小时).

(1) 任取一只这种灯管, 求能正常使用1000小时以上的概率.

(2) 有一只这种灯管已经正常使用了1000 小时以上, 求还能使用1000小时以上的概率.

解　X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2000}x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$(1)\ P\{X>1000\}=1-P\{X\le 1000\}$$

$$=1-F(1000)$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 0.607.$$

$$(2)\ P\{X>2000 \mid X>1000\}$$

$$=\frac{P\{X>2000, X>1000\}}{P\{X>1000\}}$$

$$=\frac{P\{X>2000\}}{P\{X>1000\}}$$

$$= \frac{1 - P\{X \leq 2000\}}{1 - P\{X \leq 1000\}}$$

$$= \frac{1 - F(2000)}{1 - F(1000)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607.$$

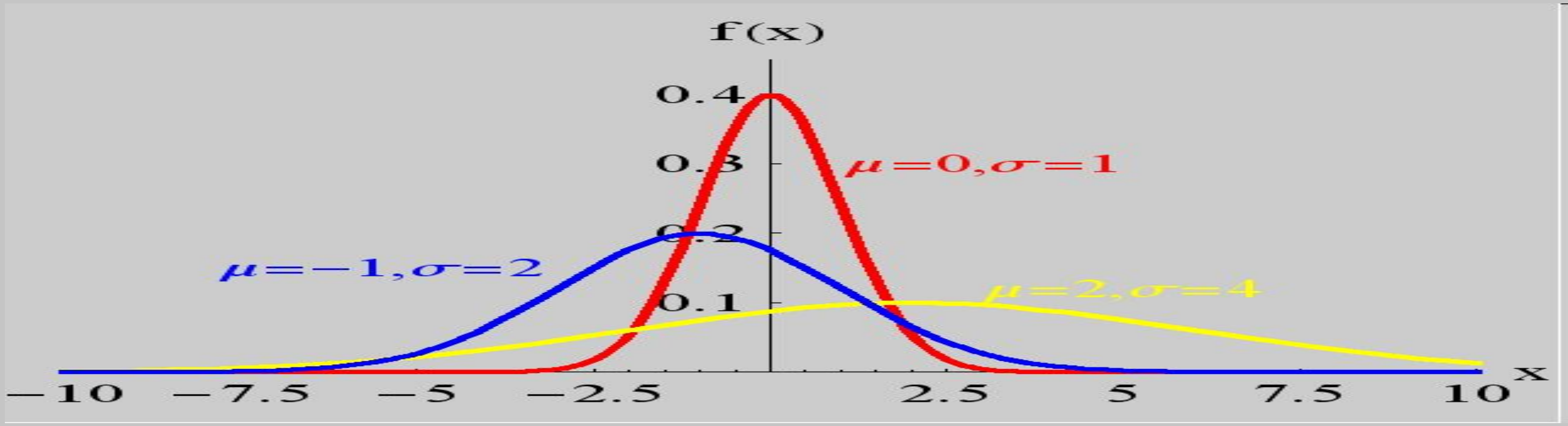
指数分布的重要性质 :“无记忆性” .

3. 正态分布(或高斯分布)

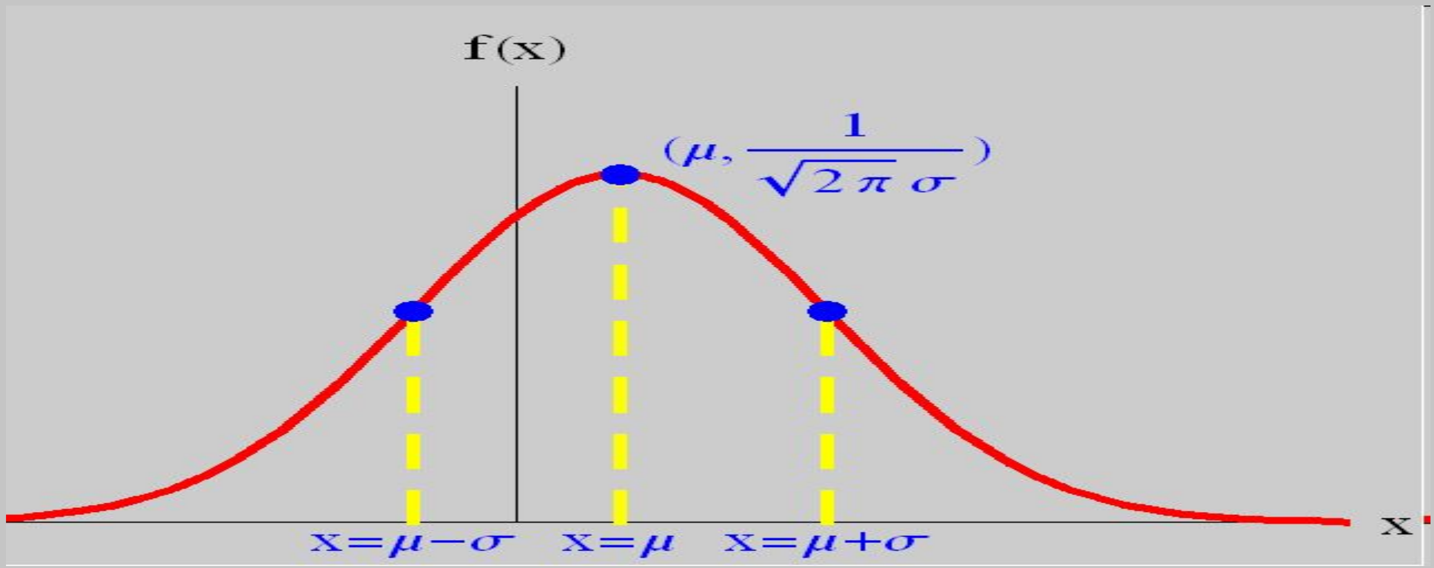
定义 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty,$$

其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 为常数,则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布或高斯分布,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.



正态概率密度函数的几何特征



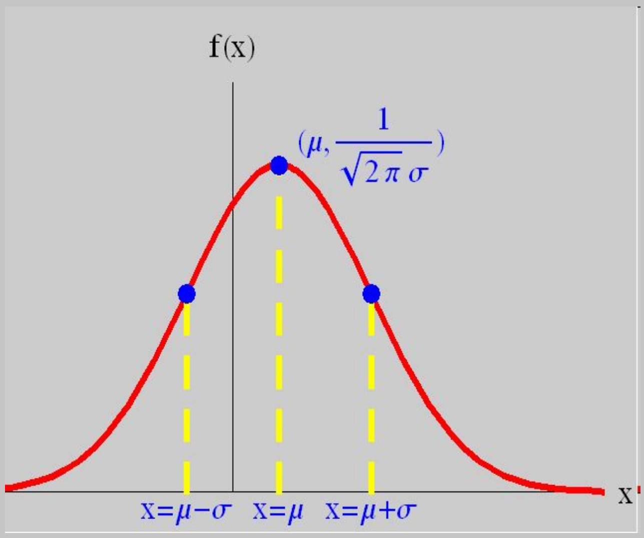
(1) 曲线关于 $x=\mu$ 对称;

(2) 当$x=\mu$时, $f(x)$取得最大值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;

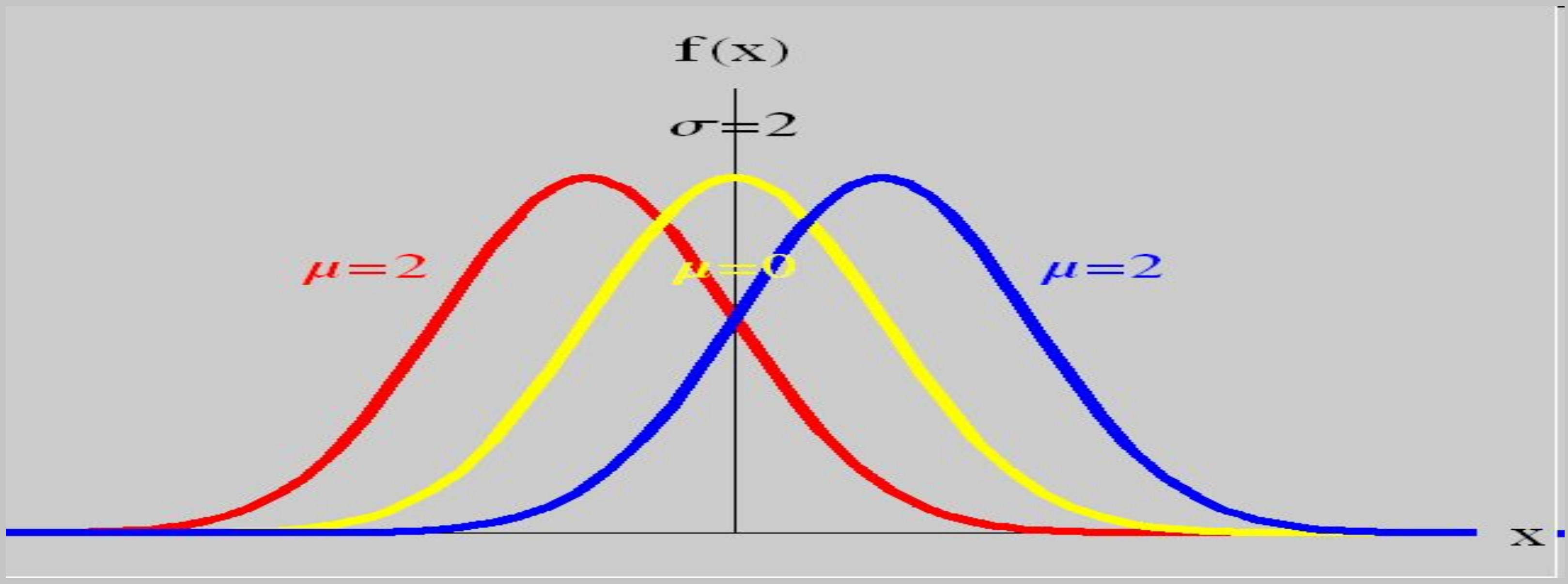
(3) 当 $x\to\pm\infty$ 时, $f(x)\to 0$;

(4) 曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点;

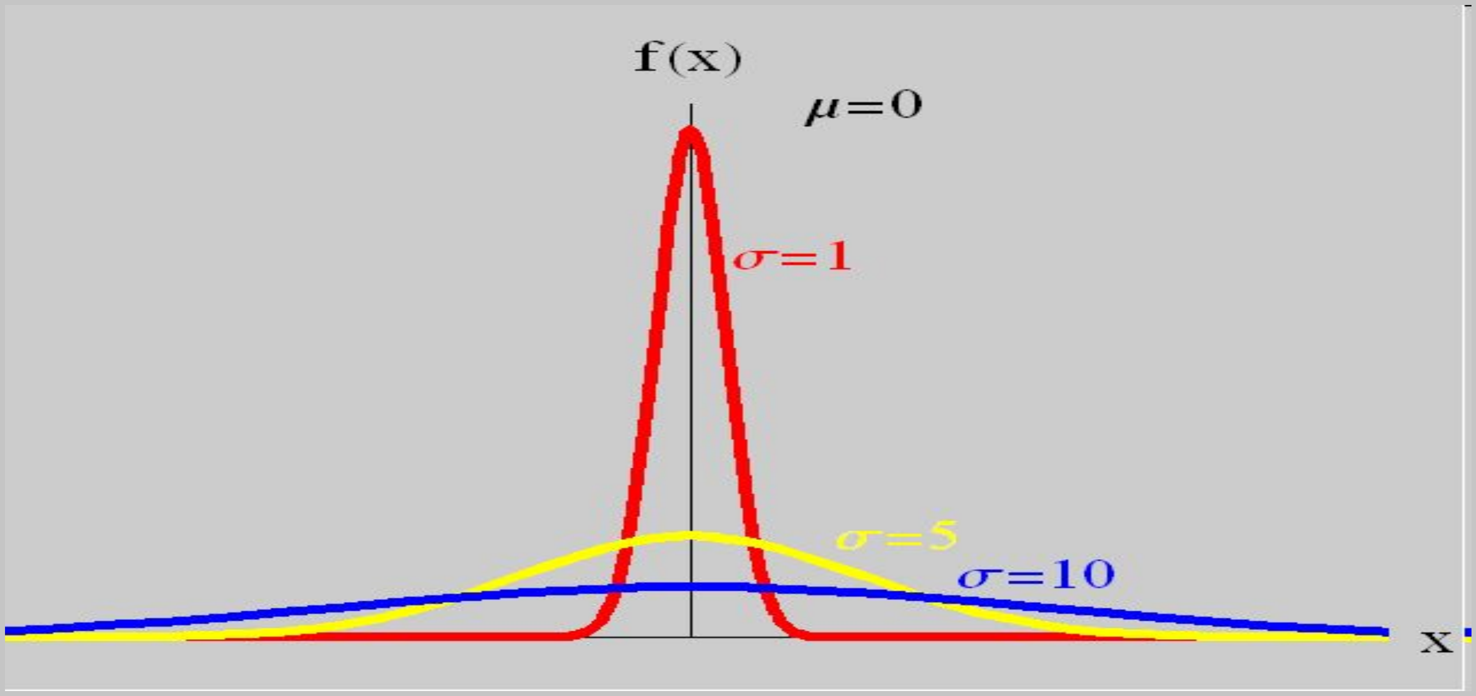
(5) 曲线以 x 轴为渐近线;



(6) 当固定 σ, 改变 μ 的大小时, $f(x)$ 图形的形状不变, 只是沿着 x 轴作平移变换;

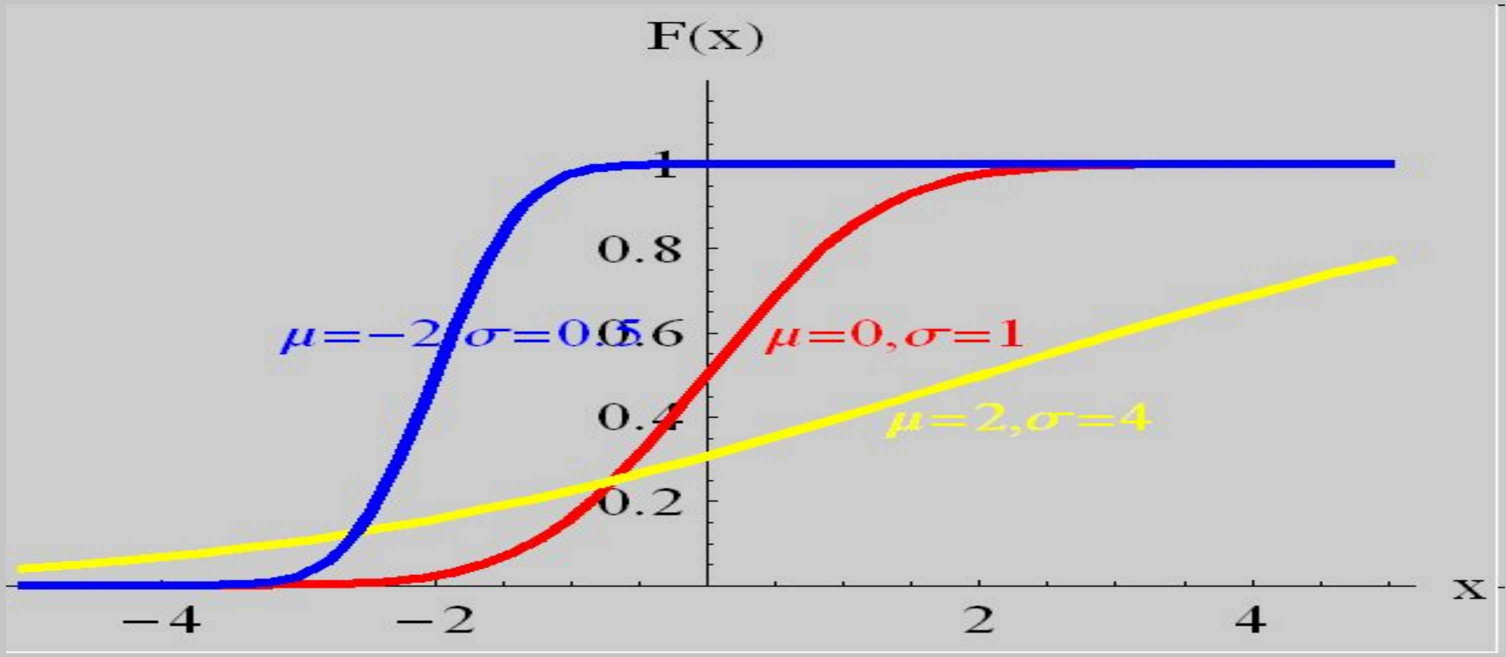


(7) 当固定 μ, 改变 σ 的大小时, $f(x)$ 图形的对称轴不变,而形状在改变, σ 越小,图形越高越瘦,σ越大,图形越矮越胖.



正态分布的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$



正态分布的应用与背景

正态分布是最常见最重要的一种分布，例如测量误差，人的生理特征尺寸如身高、体重等；正常情况下生产的产品尺寸：直径、长度、重量高度等都近似服从正态分布.

正态分布下的概率计算

原函数不是初等函数

$$P\{X \le x\} = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\boxed{\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t}$$

$$= ?$$

方法一: 利用MATLAB软件包计算

方法二: 转化为标准正态分布查表计算

标准正态分布

当正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的 $\mu=0,\sigma=1$ 时，这样的正态分布称为标准正态分布，记为 $N(0,1)$.

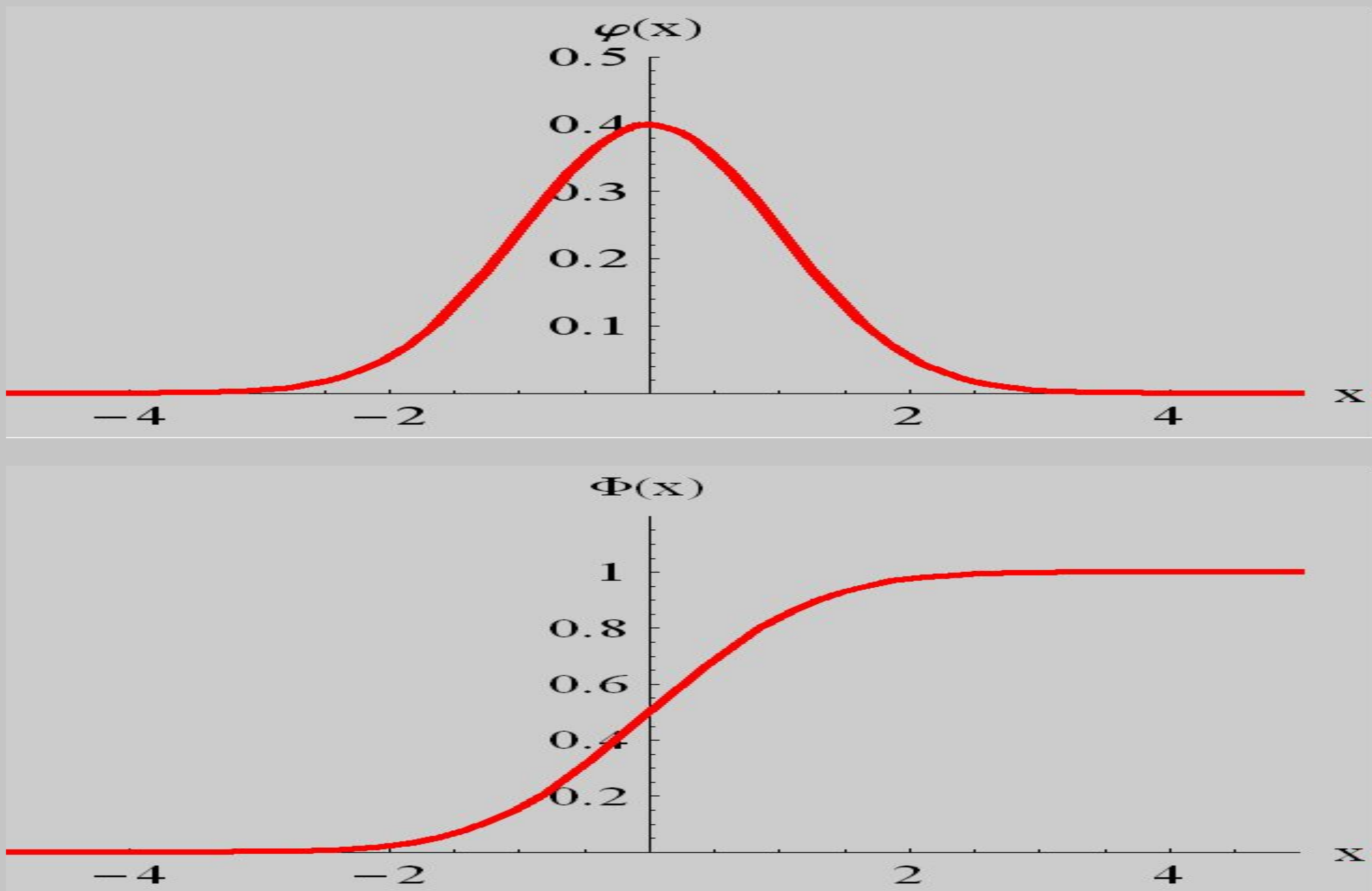
标准正态分布的概率密度表示为

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<\infty,$$

标准正态分布的分布函数表示为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<\infty.$$

标准正态分布的图形



例4 已知 $X \sim N(0,1)$,求 $P\{1.25 \le X < 2\}$.

解 $P\{1.25 \le X < 2\}$

$= \Phi(2) - \Phi(1.25)$

$= 0.9772 - 0.8944$

$= 0.0828.$

引理 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

证明 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$的分布函数为

$$P\{Z \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le x\right\} = P\{X \le \mu + \sigma x\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\mu+\sigma x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt,$$

令$\dfrac{t-\mu}{\sigma} = u$,得 $P\{Z \le x\} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \Phi(x)$,

故 $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

例5 已知 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,求 $P\{c \le X \le d\}$.

解
$$P\{c \le X \le d\} = \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = u$,
$$= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \sigma \, du$$

$$= \int_{\frac{c-\mu}{\sigma}}^{\frac{d-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot du$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{d-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\cdot\mathrm{d}u-\int_{-\infty}^{\frac{c-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\cdot\mathrm{d}u$$

$$=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$$

因而 $P\{c\le X\le d\}=F(d)-F(c)$

$$=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$$

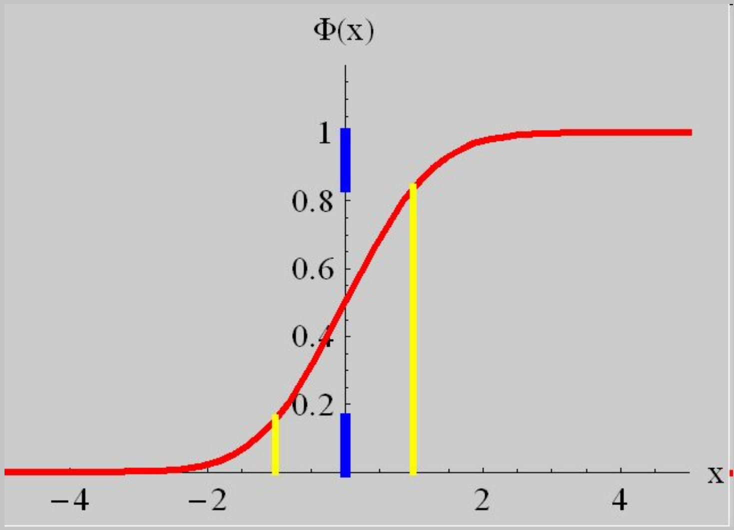
即 $P\{c\le X\le d\}=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right).$

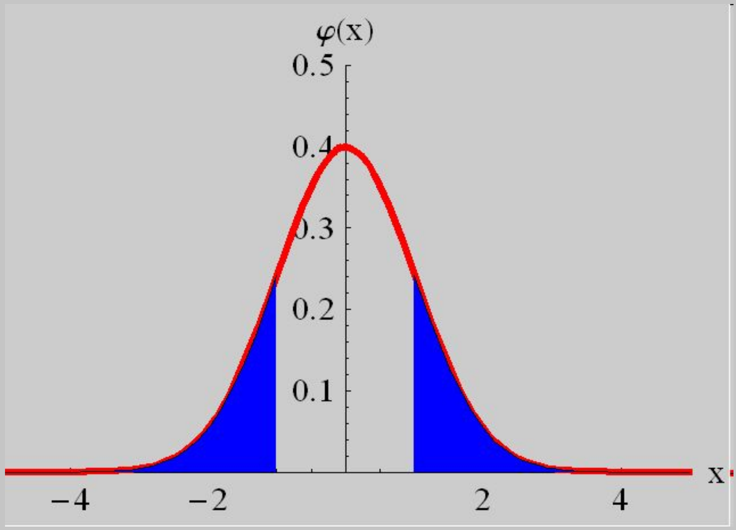
例6 证明 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

证明 $$\Phi(-x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=1-\Phi(x).$$





例7 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内. 调节器整定在 d°C, 液体的温度 X (以$^{\circ}$C计) 是一个随机变量, 且$X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1) 若 $d = 90$, 求 X 小于 89 的概率.

(2) 若要求保持液体的温度至少为 80°C 的概率不低于 0.99, 问 d 至少为多少?

解 (1) 所求概率为

$$P\{X < 89\} = \Phi\left(\frac{89-90}{0.5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

$$= 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

(2) $P\{X > 80\} \geq 0.99$

$$\Rightarrow 1 - P\{X \leq 80\} \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - F(80) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \geq 0.99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{80-d}{0.5}\right) \leq 1 - 0.99 = 0.01,$$

即 $\dfrac{80-d}{0.5} \leq -2.327 \Rightarrow d \geq 81.1635.$

常见连续型随机变量的分布

$$\begin{cases} \text{均匀分布} \\ \text{正态分布(或高斯分布)} \\ \text{指数分布} \end{cases}$$

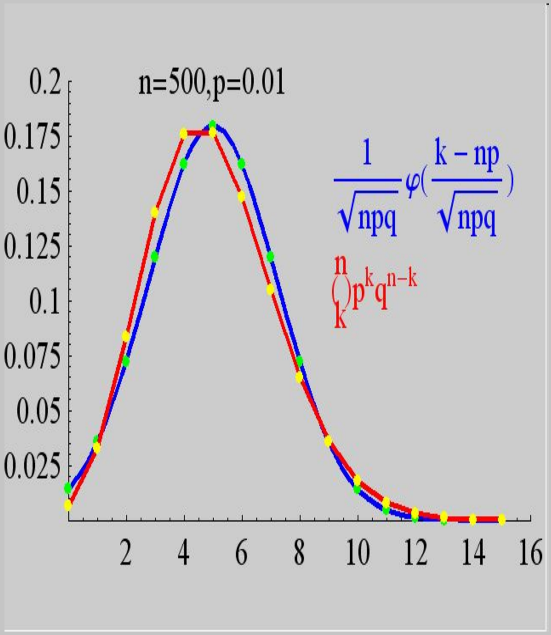
正态分布是概率论中最重要的分布

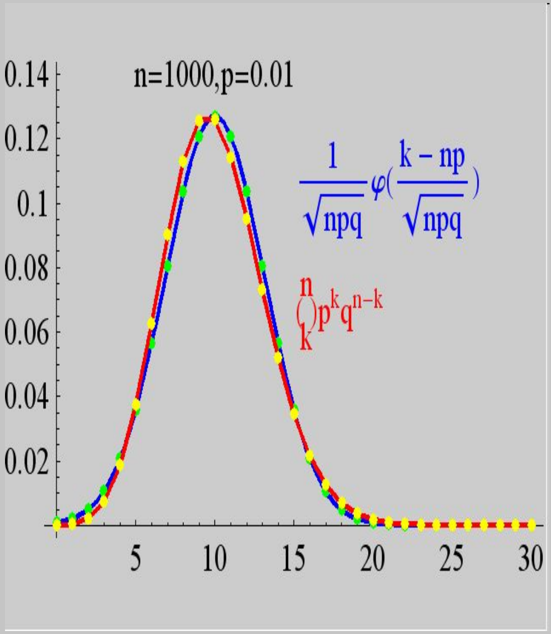
正态分布有极其广泛的实际背景，例如测量误差，人的生理特征尺寸如身高、体重等，正常情况下生产的产品尺寸：直径、长度、质量、高度，炮弹的弹落点的分布等，都服从或近似服从正态分布.

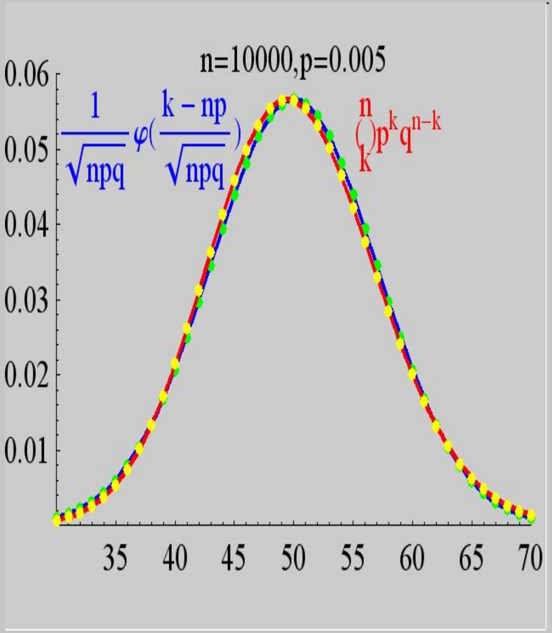
正态分布是自然界和社会现象中最为常见的一种分布，一个变量如果受到大量微小的、独立的随机因素的影响，那么这个变量一般是一个正态随机变量.

另一方面，有些分布(如二项分布、泊松分布)的极限分布是正态分布.所以，无论在实践中，还是在理论上，正态分布是概率论中最重要的一种分布.

二项分布向正态分布的转换







2.4 二维随机变量

(一) 联合分布和边缘分布

(二) 随机变量的独立性

(三) 二维随机变量的条件分布

（一）联合分布和边缘分布

1、离散型随机变量的边缘分布律

2、连续型随机变量的边缘分布

3、边缘分布函数

1、离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$

记
$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$
$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1,2,\cdots.$$

因此得离散型随机变量关于X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\sum_{x_i\le x}\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\sum_{y_j\le y}\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

例1 已知下列分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$

解

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}$
0	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{3}{7}$
$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

注意

联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布

例2 一整数 N 等可能地在 $1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$ 是能整除 N 的素数的个数. 试写出 D 和 F 的联合分布律, 并求边缘分布律.

解

样本点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分布律:

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$1/10$	0	0	0	$1/10$
1	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
2	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

或将边缘分布律表示为

D	1	2	3	4
p_k	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$

F	0	1	2
p_k	$1/10$	$7/10$	$2/10$

2、连续型随机变量的边缘分布

定义 对于连续型随机变量 (X,Y)，设它的概率密度为 $f(x,y)$，由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u,$$

记

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)\,\mathrm{d}v,$$

称其为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v,$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\,\mathrm{d}u.$$

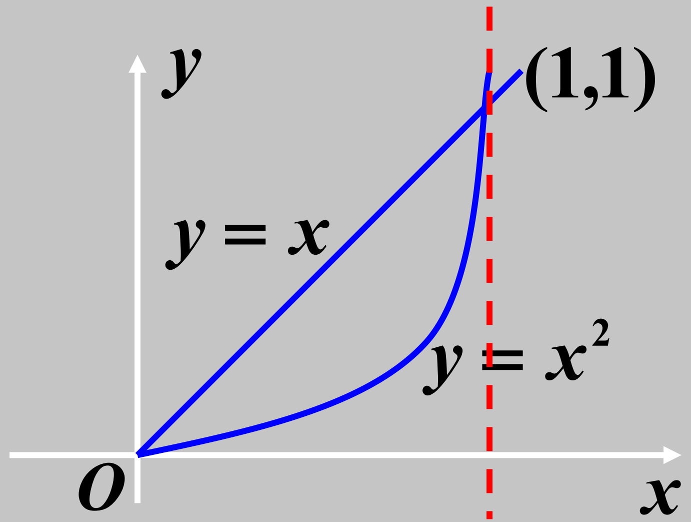
Y 的边缘概率密度.

例3 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$



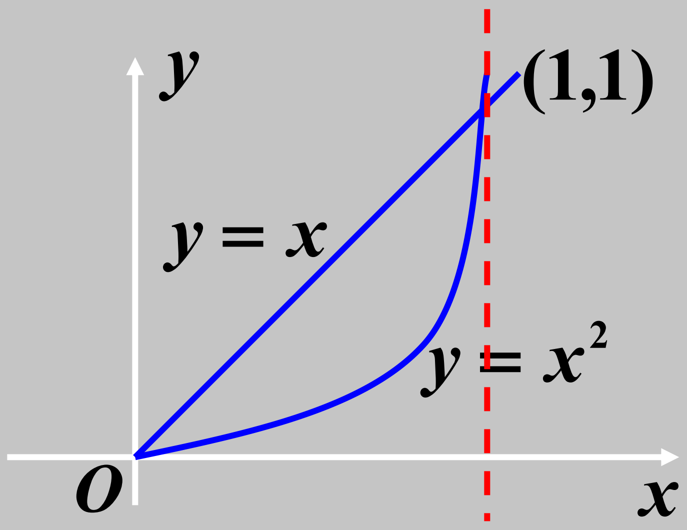
当 $0\le x\le 1$ 时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}y = 6(x-x^2).$$

当 $x<0$ 或 $x>1$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y=0.$$



因而得

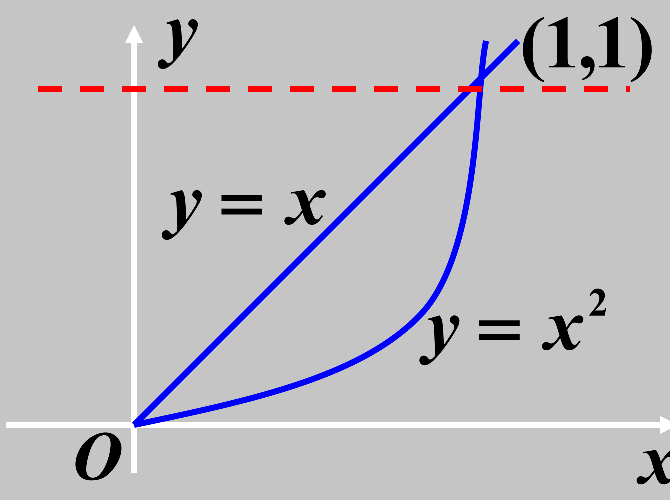
$$f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $0 \le y \le 1$ 时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x$$

$$= 6(\sqrt{y} - y).$$



当 $y < 0$ 或 $y > 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x = 0.$

得 $$f_Y(y) = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$
$-1<\rho<1.$

试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$ 由于

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho_0)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]}\mathrm{d}y,$$

令 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$

则有 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

即 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

同理可得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，

并且都不依赖于参数 ρ.

令 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y),$$

显然, (X,Y) 不服从正态分布,但是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}.$$

因此边缘分布均为正态分布的随机变量,其联合分布不一定是二维正态分布.

3、边缘分布函数

问题：已知 (X,Y) 的分布，如何确定 X,Y 的分布？

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\},\ F(x)=P\{X\le x\},$$

$$P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<\infty\}=F(x,\infty)=F_X(x)$$

(X,Y) 关于 X 的边缘分布函数．

定义 设 $F(x,y)$ 为随机变量 (X,Y) 的分布函数，

则 $F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$.

令 $y \to \infty$, 称 $P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < \infty\} = F(x,\infty)$

为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘分布函数 .

记为 $F_X(x) = F(x,\infty)$.

同理令 $x \to \infty$,

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = P\{X < \infty, Y \le y\} = P\{Y \le y\}$$

为随机变量 (X, Y) 关于 Y 的边缘分布函数.

（二）相互独立的随机变量

1. 定义

设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数. 若对于所有 x, y 有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

2.说明

(1) 若离散型随机变量 (X, Y) 的分布律为

$$P\{X=i, Y=j\}=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立

$$\Leftrightarrow P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j}.$

(2) 设连续型随机变量 (X,Y)的概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$,则有

X 和 Y 相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

(3) X 和 Y 相互独立,则

$f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立.

例1 已知 (X,Y) 的分布律为

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立,求 α 与 β 的值.

解 将 (X,Y) 的分布律改写为

X \ Y	1	2	3	$p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_{\bullet j}=P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	$\frac{2}{3}+\alpha+\beta$

(1) 由分布律的性质知 $\alpha\geq 0, \beta\geq 0, \ \frac{2}{3}+\alpha+\beta=1,$

故α与β应满足的条件是：$\alpha\geq 0, \beta\geq 0$ 且 $\alpha+\beta=\frac{1}{3}.$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立，所以有

$$p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j},\quad (i=1,2;\ j=1,2,3)$$

特别有

$$p_{12}=p_{1\bullet}\cdot p_{\bullet 2}\Rightarrow \frac{1}{9}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{2}{9},$$

又 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{3},$

得 $\beta=\dfrac{1}{9}.$

例2 设随机变量 X 和 Y 相互独立,并且 X 服从 $N(a,\sigma^2)$, Y 在 $[-b,b]$ 上服从均匀分布,求 (X,Y) 的概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

又 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<\infty$;

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & -b\le y\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$f(x,y)=\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 $-\infty<x<\infty$, $-b\le y\le b$.

当 $|y|>b$ 时, $f(x,y)=0$.

例3 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X, Y) 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

$$P\{X=1, Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=0.3\times0.6=0.18,$$

$$P\{X=1, Y=4\}=P\{X=1\}P\{Y=4\}=0.3\times0.4=0.12,$$

$$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\}=0.7\times0.6=0.42,$$

$$P\{X=3,Y=4\}=P\{X=3\}P\{Y=4\}=0.7\times0.4=0.28.$$

因此 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

例4 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8–12时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7–9时，设他们两人到达的时间相互独立，求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.

解 设 X 和 Y 分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间，由假设 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1/4, & 8<x<12,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1/2, & 7<x<9,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

由于 X,Y 相互独立，得 (X,Y) 的概率密度为

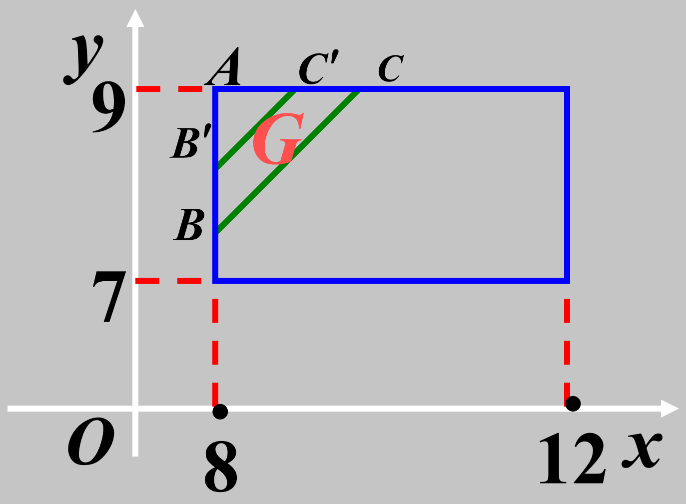
$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}1/8, & 8<x<12, 7<y<9,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$P\{|X-Y|\le 1/12\}$$

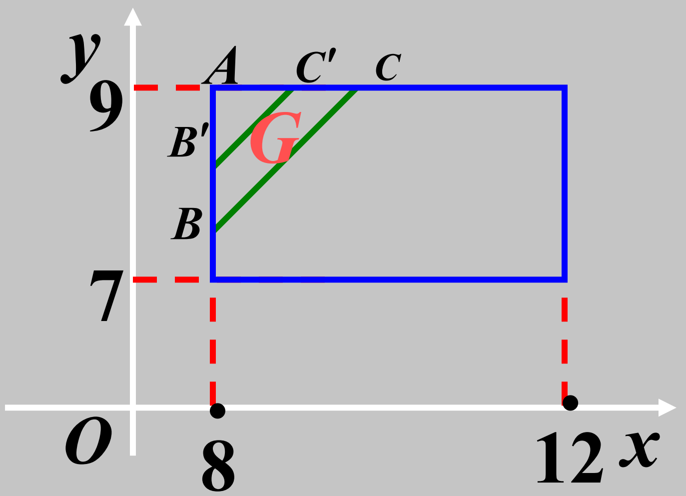
$$=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{的面积}).$$



而 G的面积 $=\Delta ABC$的面积 $-\Delta AB'C'$的面积

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$



于是 $P\{|X-Y|\le 1/12\}$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{ 的面积})=\frac{1}{48}.$$

因此负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率为 $\dfrac{1}{48}$.

（三）二维随机变量的条件分布

1、离散型随机变量的条件分布

2、连续型随机变量的条件分布

1、离散型随机变量的条件分布

定义 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若 $P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}},$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

对于固定的 i, 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},$$

为在 $X=x_i$ 条件下随机变量 Y 的条件分布律.

其中 $i, j=1, 2, \cdots$.

例1 在一汽车工厂中，一辆汽车有两道工序是由机器人完成的. 其一是紧固 3 只螺栓，其二是焊接 2 处焊点. 以 X 表示螺栓紧固得不良的数目，以 Y 表示焊点焊接得不良的数目.

据积累的资料知 (X, Y) 具有分布律:

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1) 求在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律;

(2) 求在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律.

解 由上述分布律的表格可得

$$P\{Y=0 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.030}{0.045},$$

$$P\{Y=1 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.010}{0.045},$$

$$P\{Y=2 \mid X=1\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{X=1\}}=\frac{0.005}{0.045},$$

即在 $X=1$ 的条件下，Y 的条件分布律为

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k \mid X=1\}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

同理可得在 $Y=0$ 的条件下，X 的条件分布律为

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k \mid Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

例2 一射手进行射击，击中目标的概率为p $(0<p<1)$，射击到击中目标两次为止. 设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数. 试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解 由题意知 X 取 m 且 Y 取 n 时,有

$$P\{X=m,Y=n\}=p\cdot p\cdot\underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)}_{(n-2)\text{个}},$$

即得 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=m,Y=n\}=p^2q^{n-2},$$

其中$q=1-p$, $\quad n=2,3,\cdots;\quad m=1,2,\cdots,n-1.$

现在求条件分布律.

$$P\{X=m|Y=n\},\quad P\{Y=n|X=m\},$$

由于 $P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}$

$$=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-2}=\frac{p^2q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},$$

$$m=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\qquad n=2,3,\cdots.$$

所以当 $n=2,3,\cdots$ 时，

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},$$

当 $m=1,2,\cdots,n-1$ 时，

$$P\{Y=n\mid X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}$$

$$=\frac{p^2q^{n-2}}{p\,q^{m-1}}=pq^{n-m-1},$$

$$n=m+1,m+2,\cdots.$$

2、连续型随机变量的条件分布

定义 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$. 若对于固定的 y，$f_Y(y)>0$，则称 $\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 为在 $Y=y$ 的条件下 X 的条件概率密度，记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

称 $\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}u$ 为在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件分布函数, 记为

$$P\{X \le x|Y = y\} \text{ 或 } F_{X|Y}(x|y),$$

即 $$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \le x|Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}u.$$

同理定义在 $X = x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \le y|X = x\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)}\mathrm{d}v.$$

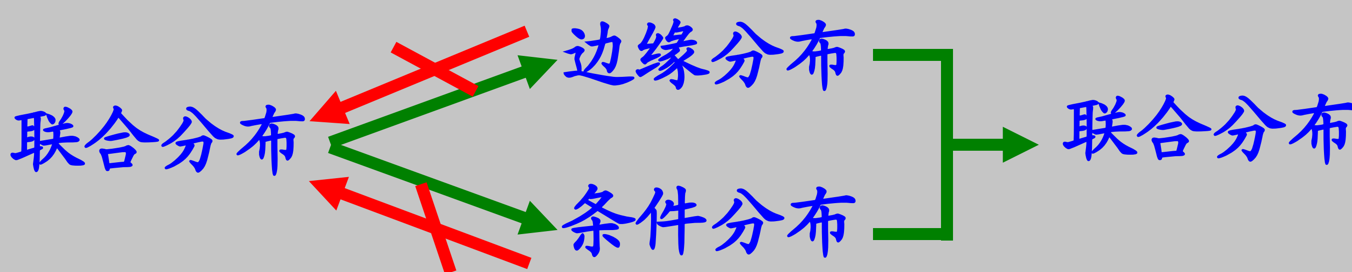
条件分布函数与条件密度函数的关系

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u|y)\,\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{x}[f(u,y)/f_Y(y)]\,\mathrm{d}u.$$

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)\,\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{y}[f(x,v)/f_X(x)]\,\mathrm{d}v.$$

说明

联合分布、边缘分布、条件分布的关系如下



例3 设 G 是平面上的有界区域,其面积为 A.若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 (X,Y) 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布,求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

解 由题意知随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

又知边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是当 $-1<y<1$ 时, 有

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例4 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值，当观察到 $X=x\,(0<x<1)$ 时，数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机地取值. 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 由题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对于任意给定的值 $x(0<x<1)$，在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故得 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x=-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2.5 随机变量函数的分布

（一） 一维随机变量函数的分布

（二） 维随机变量函数的分布

随机变量的函数的分布

一、离散型随机变量的函数的分布

二、连续型随机变量的函数的分布

一、离散型随机变量的函数的分布

设 $f(x)$ 是定义在随机变量 X 的一切可能值 x 的集合上的函数，若随机变量 Y 随着 X 取值 x 的值而取 $y = f(x)$ 的值，则称随机变量 Y 为随机变量 X 的函数，记作 $Y = f(X)$.

问题

如何根据已知的随机变量 X 的分布求得随机变量 $Y = f(X)$ 的分布？

例1 设 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求 $Y=X^2$ 的分布律.

解 Y 的可能值为 $(-1)^2,\ 0^2,\ 1^2,\ 2^2;$

即 0, 1, 4.

$$P\{Y=0\}=P\{X^2=0\}=P\{X=0\}$$
$$=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X^2=1\}=P\{(X=-1)\cup(X=1)\}$$

$$=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=4\}=P\{X^2=4\}=P\{X=2\}=\frac{1}{4},$$

故 Y 的分布律为

Y	0	1	4
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此归纳出离散型随机变量函数的分布的求法.

离散型随机变量的函数的分布

如果 X 是离散型随机变量,其函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量.若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=g(X)$的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $g(x_k)$ 中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

例2 设

X	-1	1	2
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

求 $Y = X^2 - 5$ 的分布律.

解 Y 的分布律为

Y	-4	-1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

二、连续型随机变量的函数的分布

例3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解 第一步 先求 $Y=2X+8$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}$$

$$=P\left\{X\le\frac{y-8}{2}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}}f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步　由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F_y'(y) = [\int_{-\infty}^{\frac{y-8}{2}} f_X(x)\mathrm{d}\,x]' = f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\left(\frac{y-8}{2}\right)',$$

所以

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}, & 0 < \frac{y-8}{2} < 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例4 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^3\mathrm{e}^{-x^2}, & x\ge 0.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2$ 和 $Y=2X+3$ 的概率密度.

解 先求随机变量 $Y=X^2$ 分布函数,

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$$

$$=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

$$=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}f_X(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{-\sqrt{y}}f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

再由分布函数求概率密度.

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})' - f_X(-\sqrt{y})(-\sqrt{y})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (\sqrt{y})^3 \cdot e^{-(\sqrt{y})^2} + 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{ye^{-y}}{2}, y > 0, \\ 0, \qquad y \leq 0. \end{cases}$$

当 $Y=2X+3$ 时，有 $y=2x+3 \Rightarrow x=\dfrac{y-3}{2}$,

$$f_Y(y)=F_y'(y)=\left[\int_{-\infty}^{\frac{y-3}{2}} f_X(x)\,\mathrm{d}\,x\right]'$$

$$=\begin{cases}\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^3 \mathrm{e}^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}\left(\dfrac{y-3}{2}\right)', & y \geq 3, \\ 0, & y<3.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^3 \mathrm{e}^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y \geq 3, \\ 0, & y<3.\end{cases}$$

由上述例题可归纳出计算连续型随机变量的函数的概率密度的方法.

定理 设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x)$, 其中 $-\infty < x < +\infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导, 且恒有 $g'(x) > 0$ (或恒有 $g'(x) < 0$), 则称 $Y = g(Y)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty))$, $\beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$, $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

例5 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$ 也服从正态分布.

证明 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

设 $y = g(x) = ax + b$,

得 $x = h(y) = \dfrac{y-b}{a}$, 知 $h'(y) = \dfrac{1}{a} \neq 0$.

由公式 $f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

得 $Y=aX+b$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right),\quad -\infty<y<\infty.$$

$$=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}},\quad -\infty<y<\infty.$$

得 $Y=aX+b$

$\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$

例6 设电压 $V = A\sin\Theta$, 其中 A 是一个已知的正常数, 相角 Θ 是一个随机变量, 且有 $\Theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 试求电压 V 的概率密度.

解 因为 $v = g(\theta) = A\sin\theta$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒有

$$g'(\theta) = A\cos\theta > 0,$$

所以反函数为 $\theta = h(v) = \arcsin\frac{v}{A}$,

$$h'(v) = \frac{1}{\sqrt{A^2 - v^2}},$$

又由$\Theta \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，知$\Theta$的概率密度为

$$f(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

由定理得$V=A\sin\Theta$的概率密度为

$$\varphi(v)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{A^2-v^2}}, & -A<v<A, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

设 $g(x)$ 是连续函数,若 X 是离散型随机变量,则 $Y=g(X)$也是离散型随机变量吗?若 X 是连续型的又怎样?

若 X 是离散型随机变量,它的取值是有限个或可列无限多个,因此 Y 的取值也是有限个或可列无限多个,因此 Y 是离散型随机变量.若 X 是连续型随机变量,那么 Y 不一定是连续型随机变量.

例如，设 X 在 $(0,2)$ 上服从均匀分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又设连续函数 $y=g(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2.\end{cases}$

则 $Y=g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y)$ 可以计算出来：

由于 Y 的取值为 $[0,1]$，所以

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0;$

当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1;$

当 $0\le y\le 1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

$$=\int_{g(x)\le y} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^y \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{y}{2}.$$

故 Y 的分布函数为 $F_Y(Y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{y}{2}, & 0\le y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$

因为 $F_Y(y)$ 在 $y=1$ 处间断,

故 $Y=g(X)$ 不是连续型随机变量,

又因为 $F_Y(y)$ 不是阶梯函数,

故 $Y=g(X)$ 也不是离散型随机变量.