第六章 参数估计

6.1 点估计

（一） 矩法

（二） 最大似然估计法

点估计问题的一般提法

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 的形式为已知，θ 是待估参数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应的一个样本值.

点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来估计未知参数 θ.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\text{称为}\theta\text{的估计量.}\\ \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\text{称为}\theta\text{的估计值.}\end{array}\right\}\text{通称估计，简记为}\hat{\theta}.$$

（一）矩法

定义6.1 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in\Theta$ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本观测值．选取一个统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，以数值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 估计 θ，则称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一个估计量，称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 θ 的估计值.

在不至于混淆的情况下，统称估计量和估计值为估计.

（一） 矩法

所谓矩法就是利用样本各阶原点矩(或中心矩)与相应的总体矩,建立估计量应满足的方程,从而求出未知参数估计量的方法.

考虑到在许多分布中所含的参数都是总体矩的函数,因此很自然地会想到用样本矩代替总体矩,从而得到总体分布中未知参数的一个估计.这种方法称为矩估计法,简称矩法.

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)\in\Theta$是未知参数(k为未知参数的个数,k=1,2,…),$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自X的样本,$x_1,x_2,\ldots,x_n$是样本观测值,则矩法构造未知参数估计量的步骤如下:

（一） 矩法

(1)计算总体 X 的 k 阶原点矩 E (X k),并记

$$E(X^k)=\mu_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m);$$

(2)用样本 k 阶原点矩替换总体 k 阶原点矩,列出方程组

$$\begin{cases}\mu_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\\ \mu_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2,\\ \cdots\cdots\\ \mu_m(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^m;\end{cases}$$

(3)解此方程组得

$$\hat{\theta}_r = \theta_r(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad (r = 1,2,\cdots,k),$$

则以$\hat{\theta}_r(X_1,X_2,\cdots,X_n)$作为 θ_r 的估计量$\hat{\theta}_r(r=1,2,\cdots,k)$,并

称$\hat{\theta}_r = \hat{\theta}_r(X_1, X_2, \cdots, X_n) \quad (r = 1,2,\cdots,k)$

为 $\theta_r(r=1,2,\cdots,k)$的**矩估计量**,而称$\hat{\theta}_r(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 $\theta_r(r=1,2,\cdots,k)$的**矩估计值**.

(一) 矩法

例 1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,其中 μ, σ^2 是未知参数,试求 μ, σ^2 的矩估计量.

解 我们知道,对于正态分布来说,

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本,于是有

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$D(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

得到 μ, σ^2 的矩估计量分别为

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X}, \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2. \end{cases}$$

（一） 矩法

例 2　设总体 $X \sim B(n,p)$,其中 n 已知,求 p 的矩估计量.

解　我们知道,二项分布的

$$\square(\square) = \square\square.$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本,于是有

$$\square(\square) = \square\square = \frac{1}{\square}\sum_{\square=1}^{\square}\square_{\square},$$

解方程得 p 的矩估计量为 $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{\square}$.

（一） 矩法

例 3 设总体 X 在[a, b]上服从均匀分布，其概率密度为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中，a, b 是未知参数. 试求 a, b 的矩估计量.

解 我们知道，均匀分布的期望和方差分别为

$$E(X)=\frac{1}{2}(a+b),\quad D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

现设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，于是，有

（一）矩法

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = E(X) = \dfrac{1}{2}(a+b), \\
\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X})^2 = D(X) = \dfrac{1}{12}(b-a)^2.
\end{cases}
$$

由上式可得 a,b 的矩估计量分别为

$$
\hat{a} = \bar{X} - \sqrt{3}\tilde{S}, \quad \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{3}\tilde{S},
$$

其中$\tilde{S}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，而$\tilde{S} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$.

（二） 最大似然估计法

所谓最大似然估计法就是当我们用样本的函数值估计总体参数时,应使得当参数取这些值时,所观测到的样本出现的概率最大.最大似然估计法是最重要的一种点估计方法,所求的估计量有许多优良的性质.

（二） 最大似然估计法

1. 似然函数

定义6.2 设总体 X 的分布律或概率密度为 $p(x;\theta)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本,则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布律或概率密度函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

为样本的似然函数,简记为 $L(\theta)$.

注 当总体 X 为离散型随机变量时, $p(x;\theta)$为 X 的分布律;当总体 X 为连续型随机变量时, $p(x;\theta)$为 X 的概率密度.

2. 最大似然估计法

求最大似然估计量的步骤如下:

(1)根据总体 X 的分布律或概率密度 $p(x;\theta)$,写出似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta).$$

(2)对似然函数取对数

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta).$$

(3)写出似然方程

$$\frac{d\ln L}{d\theta}=0 \quad 或 \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta}=0.$$

2. 最大似然估计法

例 4 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为取自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本. 求参数 μ, σ^2 的最大似然估计.

解 由题意可知, X 的概率密度为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}.$$

(1) 样本的似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\};$$

(2) 对似然函数取对数得

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2;$$

2. 最大似然估计法

(3)似然方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0, \end{cases}$$

解得 $\hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$, $\quad \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

因此, μ, σ^2 的最大似然估计量为

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2.$$

2. 最大似然估计法

例 5　设一批产品中含有次品,且从中随机抽取 85 件,发现次品 10 件.试估计这批产品的次品率.

解　设次品率为 p,则 $0<p<1$.设

$$□_{□} = □\begin{cases} 1, & 第□次取得次品, \\ 0, & 第□次取得合格品, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,85,$$

则 $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$ $(i=1,2,\cdots,85)$.由于

$$□(□_{□};p) = P(□_{□} = □_{□}) = □^{□_{□}}(1-p)^{1-□_{□}},$$

2. 最大似然估计法

其中,$x_i=0$ 或 $1,i=1,2,\cdots,85$,故得似然函数为

$$L(p)=L(x_1,\cdots,x_{85};p)=p^{\sum_{i=1}^{85}x_i}(1-p)^{85-\sum_{i=1}^{85}x_i},$$

从而有

$$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{85}x_i\ln p+(85-\sum_{i=1}^{85}x_i)\ln(1-p).$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\sum_{i=1}^{85}x_i\frac{1}{p}-(85-\sum_{i=1}^{85}x_i)\frac{1}{1-p}=\frac{\sum_{i=1}^{85}x_i-85p}{p(1-p)}.$$

令$\frac{d\ln L(p)}{dp}=0$,解得 p 的最大似然估计值为

$$\hat{p}=\frac{1}{85}\sum_{i=1}^{85}x_i=\frac{10}{85}=\frac{2}{17}.$$

2. 最大似然估计法

例 6　设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中, $\theta>-1$ 是未知参数, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本. 分别用矩法和最大似然估计法求 θ 的估计量.

解　(1)因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x(\theta+1)x^{\theta}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

2. 最大似然估计法

由

$$\square(\square) = \bar{X},$$

即
$$\frac{\square + 1}{\square + 2} = \bar{X},$$

故 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}.$$

(2) θ 的似然函数为

$$\square(\square) = (\square + 1)^{\square} \prod_{\square=1}^{\square} \square_{\square}^{\square} \qquad (0 < \square_{\square} < 1).$$

当 $0<x_i<1\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 时，恒有 $L(\theta)>0$，故

2. 最大似然估计法

$$\ln \square(\square) = \square \ln(\square + 1) + \square \sum_{\square=1}^{\square} \ln \square_{\square},$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln \square(\square)}{\mathrm{d}\square} = \dfrac{\square}{\square+1} + \sum_{\square=1}^{\square} \ln x_i = 0$, 则有

$$\square + 1 = -\frac{\square}{\sum_{\square=1}^{\square} \ln \square_{\square}},$$

故求得 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = -1 - \frac{\square}{\sum_{\square=1}^{\square} \ln \square_{\square}}.$$

2. 最大似然估计法

由

$$\square(\square) = \bar{X},$$

即 $$\frac{\square + 1}{\square + 2} = \bar{X},$$

故 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}.$$

（2） θ 的似然函数为

$$\square(\square) = (\square + 1)^{\square} \square \prod_{\square=1}^{\square} \square_{\square} \square \quad (0 < \square_{\square} < 1).$$

当 $0<x_i<1\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 时，恒有 $L(\theta)>0$，故

6.2 估计量的评价标准

（一）无偏性

（二）有效性

（一）一致性

设总体未知参数 θ 的估计量为 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,我们认为估计量的优良性应该由以下的标准来衡量:

(1) $\hat{\theta}$ 与被估计参数 θ 的真值越接近越好.最好是能满足 $E(\hat{\theta})=\theta$,.这就是所谓的"无偏性".

(2) $\hat{\theta}$ 围绕 θ 的真值偏离程度越小越好.一般情况下,我们认为方差越小越有效.这就是所谓的"有效性".

⑶当样本容量越来越大时，$\hat{\theta}$靠近 θ的真值的可能性也应该越来越大，最好是当样本容量趋于无穷时，$\hat{\theta}$以概率 1 收敛于 θ的真值．这就是所谓的“一致性”．

无偏性、有效性和一致性是对好的估计量的三条最基本的要求．

（一） 无偏性

定义6.3 设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是未知参数 θ的估计量，

若

$$\square(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 θ的无偏估计量.

（一）无偏性

例 1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自存在有限数学期望 μ 和方差 σ^2 的总体.

证明：

(1) $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是总体均值 μ 的无偏估计量；

(2) $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计量.

证明　(1) 由于 $E(X_i) = \mu \ (i = 1, 2, \cdots, n)$，因此

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu,$$

由无偏估计量的定义可知，$\hat{\mu} = \bar{X}$ 是 μ 的无偏估计量.

(2) 由于 $D(X_i) = \sigma^2$，$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$，所以

（一）无偏性

$$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$E(\bar{X}^2)=D(\bar{X})+[E(\bar{X})]^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2,$$

因此

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\bar{X}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[n(\mu^2+\sigma^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right)=\sigma^2,$$

由无偏估计量的定义可知，$\hat{\sigma}^2=S^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

(一) 无偏性

例 2　设 X_1,X_2,X_3 来自存在有限数学期望 μ 和方差 σ^2 的总体,试证下列统计量都是 μ 的无偏估计量:

$$(1)\ \hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3;$$

$$(2)\ \hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3;$$

$$(3)\ \hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{3}{4}X_2-\frac{1}{12}X_3.$$

证明　因为 $E(X_i)=\mu(i=1,2,3)$,所以

（一） 无偏性

$$(1)\ E(\hat{\mu}_1)=E\left(\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3\right)$$

$$=\frac{1}{5}E(X_1)+\frac{3}{10}E(X_2)+\frac{1}{2}E(X_3)=E(X)=\mu;$$

$$(2)\ E(\hat{\mu}_2)=E\left(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3\right)$$

$$=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{1}{4}E(X_2)+\frac{5}{12}E(X_3)=E(X)=\mu;$$

$$(3)\ E(\hat{\mu}_3)=E\left(\frac{1}{3}X_1+\frac{3}{4}X_2-\frac{1}{12}E(X_3)\right)$$

$$=\frac{1}{3}E(X_1)+\frac{3}{4}E(X_2)-\frac{1}{12}E(X_3)=E(X)=\mu.$$

由无偏估计量的定义可知,$\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$均为 μ的无偏估计量.

（二） 有效性

定义6.4 设$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$均是未知参数 θ的无偏估计量,若

$$\square(\hat{\theta}_1) < \square(\hat{\theta}_2),$$

则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效.

由有效性的定义容易看出,在 θ的无偏估计量中方差越小者越有效.

（二） 有效性

例 3　评价例 2 中 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 哪个估计量最有效.

解　由例 2 可知, $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$ 均是 μ 的无偏估计量.下面考虑其方差的大小:

（二） 有效性

$$\square(\hat{\mu}_1) = \square\ \square\frac{1}{5}\square_1 + \frac{3}{10}\square_2 + \frac{1}{2}\square_3\ \square = \frac{1}{25}D(\square_1) + \frac{9}{100}D(\square_2) + \frac{1}{4}D(\square_3)$$

$$= \frac{19}{50}D(X) = \frac{19}{50}\square^2;$$

$$\square(\hat{\mu}_2) = \square\ \square\frac{1}{3}\square_1 + \frac{1}{4}\square_2 + \frac{5}{12}\square_3\ \square = \frac{1}{9}D(\square_1) + \frac{1}{16}D(\square_2) + \frac{25}{144}D(\square_3)$$

$$= \frac{25}{72}D(X) = \frac{25}{72}\square^2;$$

$$\square(\hat{\mu}_3) = \square\ \square\frac{1}{3}\square_1 + \frac{3}{4}\square_2 - \frac{1}{12}\square_3\ \square = \frac{1}{9}D(\square_1) + \frac{9}{16}D(\square_2) + \frac{1}{144}D(\square_3)$$

$$= \frac{49}{72}D(X) = \frac{49}{72}\square^2,$$

因此，$D(\hat{\mu}_2) < D(\hat{\mu}_1) < D(\hat{\mu}_3)$.根据有效性的定义可知，$\hat{\mu}_2$最有效.

（三） 一致性

定义6.5 设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ的估计量,若对于任给的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right)=1,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ的**一致估计量**或相合估计量.

估计量的一致性是对于极限性质而言的,它只在样本容量 n 较大时才起作用.

（三）一致性

例 4　设有一批产品,为估计其次品率 p,随机取一样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,其中

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{取得合格品}, \\ 1, & \text{取得次品}, \end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

证明 $:\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 是 p 的无偏估计量,并讨论该估计量的一致性.

证明　由题设可知,$X_i(i=1,2,\cdots,n)$服从 0-1 分布,故

$$E(X_i) = p, \quad i = 1,2,\cdots,n;$$
$$D(X_i) = p(1-p), \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

（三） 一致性

$$E(\hat{p}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times np = p.$$

根据无偏估计的定义,$\hat{p}$ 是 p 的无偏估计量.

下面讨论估计量 $\hat{p}$ 的一致性.

由切比雪夫不等式知,对于任给的 $\varepsilon > 0$,有

$$P(|\hat{p} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2},$$

因此,当 $n \to \infty$ 时,$P(|\hat{p} - p| < \varepsilon) = 1$,即 $\hat{p}$ 是 p 的一致估计量.

（三） 一致性

例 5　证明:样本均值$\bar{X}$是总体均值 μ的一致估计量.

证明　由于样本的个体相互独立且与总体 X 同分布,所以

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu.$$

根据辛钦大数定律,对于任给的 $\varepsilon > 0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{X}-\mu| < \varepsilon\} = 1,$$

因此,样本均值$\bar{X}$是总体均值 μ的一致估计量.

6.3 区间估计

定义6.3 设总体 X 的分布函数是 $F(x;\theta)$,其中 θ是未知参数.对于给定值 $\alpha(0<\alpha<1)$,若由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 确定的两个统计量

$\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$和$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$满足

$$\square(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1-\alpha,$$

则称随机区间$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$为参数 θ的置信度为 $1-\alpha$的**置信区间**

其中 $\hat{\theta}_1$和 $\hat{\theta}_2$分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$ 称为置信度.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本,在置信度为 $1-\alpha$ 的情况下,我们来确定 μ 和 σ^2 的置信区间 $(\hat{□}_{□},\hat{□}_{□})$,步骤如下:

(1)选择样本函数.我们根据已知条件,选择一个包含未知参数 θ 的样本函数 $\phi=\phi(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,其分布是已知的.

⑵由置信度 $1-\alpha$,查表找分位数.对于给定的置信度 $1-\alpha$,定出两个常数 a,b,使 $P\{a<\Phi<b\}=1-\alpha$ (当 Φ 为连续型随机变量时,一般取 b 为 Φ 的 $\alpha/2$ 分位数,取 a 为 Φ 的 $1-\alpha/2$ 分位数).

⑶导出置信区间 $(\hat{\square}_{\square},\hat{\square}_{\square})$.将不等式“$a<\Phi<b$”变形,导出 $\hat{\square}_{\square}(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\square}_{\square}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,则区间 $(\hat{\square}_{\square},\hat{\square}_{\square})$就是 θ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

6.4 正态总体均值与方差的区间估计

（一）单个总体的情形

（二）双总体的情形

（一）单个总体的情形

设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$是正态总体X的样本.

1. 正态总体均值μ的区间估计

(1)已知方差,估计均值

（i）选择样本函数

设方差$\sigma^2=\sigma_0^2$，其中σ_0^2为已知数. 我们知道$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$是μ的一个点估计量，并且知道包含未知参数μ的样本函数

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

(ii)查表找分位数

对于给定的置信度 1−α，查标准正态分布分位数表(见附表 2)，找出分位数 u_p，使得

$$P\left(|U| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha ,$$

即

$$P\left(-u_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha .$$

（iii）导出置信区间

由不等式

$$-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma_0} < z_{\frac{\alpha}{2}}$$

推得

$$\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},$$

这就是说，随机区间

$$\left(\bar{X}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

以 1−α 的概率包含 μ .

（一） 单个总体的情形

例 1　现随机地从一批服从正态分布 $N(\mu, 0.02^2)$ 的零件中抽取 16 个，分别测得其长度（单位：cm）如下：

2.14，2.10，2.13，2.15，2.13，2.12，2.13，2.10，
2.15，2.12，2.14，2.10，2.13，2.11，2.14，2.11.

试估计该批零件的平均长度 μ，并求 μ 的置信度为 95%的置信区间.

解　首先计算样本均值$\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{2.14 + \cdots + 2.11}{16} = 2.125.$$

由题意，$\alpha=0.05$，查正态分布表（附表 2）得相应的上侧分位点 $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$. 又 $\sigma=0.02$，$n=16$，所以

$$\bar{x} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.125 - 1.96\frac{0.02}{4} \approx 2.115,$$

$$\bar{x} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.125 + 1.96\frac{0.02}{4} \approx 2.135.$$

因此，μ 的置信度为 95%的置信区间为 $(2.115, 2.135)$.

（一） 单个总体的情形

(2)未知方差,估计均值

(i)选择样本函数

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 由于 σ^2 是未知的, 不能再选取样本函数 u. 这时可用样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

来代替 σ^2, 选取样本函数

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

(一) 单个总体的情形

(ii) 查表找分位数

对于给定的置信度 $1-\alpha$，查 t 分布分位数表（见附表 4)，找出分位数 $t_{p}(n-1)$，使得

$$P\left(|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha,$$

即

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha .$$

(iii) 导出置信区间

由不等式

$$-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),$$

推得

$$\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},$$

这就是说，随机区间

$$\left(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

以 $1-\alpha$ 的概率包含 μ .

(一) 单个总体的情形

例 2 从一批零件中抽取 16 个零件,测得它们的直径(单位:mm)如下:

12.15, 12.12, 12.01, 12.08, 12.09, 12.16, 12.03, 12.01,
12.06, 12.13, 12.07, 12.11, 12.08, 12.01, 12.03, 12.06.

设这批零件的直径服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.
求零件直径的均值 μ 对应于置信度为 0.95 的置信区间.

解 因为 σ^2 未知,故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

由题设给定的样本值可得

（一） 单个总体的情形

$\square = 16,\quad \bar{X} = 12.075,\quad \square^2 = 0.00244,$

当置信度 $1-\alpha=0.95$ 时，$\alpha=0.05$，查 t 分布表（附表 4）得 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.13$，所以

$$\bar{X}-\square_{\square/2}(n-1)\frac{\square}{\text{ض}\square} = 12.075-2.13\,\frac{\text{ض}0.00244}{4} \approx 12.049,$$

$$\bar{X}+\square_{\square/2}(n-1)\frac{\square}{\text{ض}\square} \approx 12.075+2.13\,\frac{\text{ض}0.00244}{4} \approx 12.101,$$

故所求的置信区间为(12.049, 12.101).

（一） 单个总体的情形

2. 正态总体方差 σ^2 的区间估计

(i) 选择样本函数

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，

我们知道 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是 σ^2 的一个点估计，并且

知道包含未知参数 σ^2 的样本函数

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

(ii) 查表找分位数

对于给定的置信度 $1-\alpha$，查 χ^2 分布分位数表(见附表 3)，找出两个分位数 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 与 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，使得

（一） 单个总体的情形

$$\square(\square^2_{1-\frac{\square}{2}}(n-1) < \square < \square^2_{\frac{\square}{2}}(n-1)) = 1-\alpha.$$

由于 x^2 分布不具有对称性，因此通常采取使得概率对称的区间，即

$$\square(\square < \square^2_{1-\frac{\square}{2}}(n-1)) = P(w > \square^2_{\frac{\square}{2}}(n-1)) = \frac{\square}{2},$$

于是有 $P\square\square^2_{1-\frac{\square}{2}}(n-1) < \frac{(\square-1)\square^2}{\square^2} < \square^2_{\frac{\square}{2}}(n-1)\square=1-\alpha$.

(iii)导出置信区间

由不等式 $\square^2_{1-\frac{\square}{2}}(n-1)<\frac{(\square-1)\square^2}{\square^2}<\square^2_{\frac{\square}{2}}(n-1)$

（一）单个总体的情形

推得$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$,

这就是说,随机区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

以 $1-\alpha$ 的概率包含 σ^2,而随机区间

$$\left(\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}S, \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}S\right)$$

以 $1-\alpha$ 的概率包含 σ .

（一） 单个总体的情形

例 3　试求本节例 2 中零件直径的方差 σ^2 对应于置信度 98%的置信区间.

解　由题设可知, μ 未知,给定置信度 $1-\alpha=0.98$,即 $\alpha=0.02$,查 χ^2 分布分位数表(附表 3)得

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.99}(15)=5.23,$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.01}(15)=30.6,$$

故由单正态总体方差 σ^2 的置信区间估计可知,零件直径的方差 σ^2 对应于置信度 98%的置信区间为

$$\left(\frac{15\times 0.00244}{30.6},\frac{15\times 0.00244}{5.23}\right),$$

即(0.001196,0.006998).

（二）双总体的情形

1.两个正态总体均值差μ₁-μ₂的区间估计

由样本的独立性可知，$\bar{X}$和$\bar{Y}$是独立的，所以

$$E(\bar{X}-\bar{Y}) = E(\bar{X})-E(\bar{Y}) = \mu_1-\mu_2,$$

$$D(\bar{X}-\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2},$$

因此，$\bar{X}-\bar{Y}$服从正态分布 $N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$，$\bar{X}-\bar{Y}$经标准化后可得

$$U = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1).$$

(二) 双总体的情形

1.两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计

(1) 当 σ_1,σ_2 都已知时

记 $\eta=\bar{X}-\bar{\square}$, $\mu=\mu_1-\mu_2$, $\sigma^2=\frac{\square_1^2}{\square_1}+\frac{\square_2^2}{\square_2}$,由上面的讨论可知, $\eta\sim N(\mu,\sigma^2)$

因此,求两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计就相当于求单个正态总体 η 的参数 μ 的区间估计.

由于 σ_1,σ_2 都已知,所以 σ^2 已知,故给定置信度 $1-\alpha$,由单正态总体均值 μ 的置信区间估计可知,正态总体 μ 的区间估计为

$$(\square-\square_{\square/2}\sigma,\ \eta+\square_{\square/2}\sigma),$$

即正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间为

$$\square\bar{X}-\bar{\square}-\square_{\square/2}\square\sqrt{\frac{\square_1^2}{\square_1}+\frac{\square_2^2}{\square_2}},\ \bar{X}-\bar{\square}+\square_{\square/2}\square\sqrt{\frac{\square_1^2}{\square_1}+\frac{\square_2^2}{\square_2}}\square.$$

(二) 双总体的情形

1.两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计

例 4　两台机床加工同一种轴,且第一台机床加工的轴的椭圆度 X 服从方差为 $\square_1^2=0.025^2\mathrm{mm}^2$ 的正态分布,第二台机床加工的轴的椭圆度 Y 服从方差为 $\square_2^2=0.062^2\mathrm{mm}^2$ 的正态分布.现分别从两台机床所加工的轴中随机抽取 200 根和 150 根,测量其椭圆度,经计算得:

第一台机床: $n_1=200, \overline{X}=0.081\mathrm{mm}$;

第二台机床: $n_2=150, \overline{\square}=0.062\mathrm{mm}$.

给定置信度为 95%,试求两台机床加工的轴的平均椭圆度之差的置信区间.

（二） 双总体的情形

1.两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计

解 记第一台机床加工的轴的平均椭圆度为 μ_1,第二台机床加工的轴的平均椭圆度为 μ_2.给定置信水平 $1-\alpha=0.95$ 后,查标准正态分布表(附表 2)得 $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$,于是

$$\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\left(0.081-0.062-1.96\sqrt{\frac{(0.025)^2}{200}+\frac{(0.062)^2}{150}}\right)\text{mm}$$

$$\approx 0.0085(\text{mm}),$$

$$\bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}=\left(0.081-0.062+1.96\sqrt{\frac{(0.025)^2}{200}+\frac{(0.062)^2}{150}}\right)\text{mm}$$

$$\approx 0.0295(\text{mm}),$$

得到两台机床加工的轴的平均椭圆度之差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95%的置信区间为(0.0085,0.0295).

（二）双总体的情形

1.两个正态总体均值差μ$_1$-μ$_2$的区间估计

(2)当σ$_1$,σ$_2$未知,但σ$_1$=σ$_2$=σ时

由于 $U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\,\sigma}\sim N(0,1)$分布,但σ^{2}未知,这时该怎样来构造统计量呢?由于

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

故给定置信度1-α,得到正态总体均值差μ$_1$-μ$_2$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}S_w,\ \bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}S_w\right),$$

其中 $S_w=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

(二) 双总体的情形

1.两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计

例 5 某公司利用两条自动化流水线灌装矿泉水,现从流水线上分别随机抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{12}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{17}$,测量每瓶所装矿泉水的体积(单位:ml).计算得到样本均值 $\bar{X}=501.1$, $\bar{Y}=499.7$,样本方差 $S_1^2=2.4$, $S_2^2=4.7$.设这两条流水线所装的矿泉水的体积 X,Y 都服从正态分布,分别为 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$.求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 由题意, σ_1, σ_2 未知,但 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, $n_1=12$, $n_2=17$, $S_1^2=2.4$, $S_2^2=4.7$,因此,可计算得

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{11\times 2.4+16\times 4.7}{12+17-2}}\approx 1.940.$$

由于 $1-\alpha=0.95$,查 t 分布表(附表 4)得 $t_{\alpha/2}(27)=2.05$,于是

（二）双总体的情形

1.两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的区间估计

$$\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=501.1-499.7-2.05\times\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{17}}\times 1.940$$

$$\approx -0.099,$$

$$\bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=501.1-499.7+2.05\times\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{17}}\times 1.940$$

$$\approx 2.899,$$

于是,得到 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间为(-0.099,2.899).

（二）双总体的情形

2. 两个正态总体方差比的区间估计

设两个独立正态总体为 $X \sim N(\mu_1, □)$，$Y \sim N(\mu_2, □)$，其中 μ_1, σ_1，μ_2, σ_2 均未知.现分别取总体 X 和 Y 的两个子样 $X_1, X_2, \cdots, □$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, □$，下面我们来考虑在这种情况下方差比 $\frac{□}{□}$ 的区间估计问题.

2. 两个正态总体方差比的区间估计

由于

$$\square = \frac{\square_{\square}^{\square} / \square_{\square}^{\square}}{\square_{\square}^{\square} / \square_{\square}^{\square}} \sim \square(\square_{\square}-\square, \square_{\square}-\square),$$

给定置信度 $1-\alpha$,则存在 $F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1), F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$,使得

$$P\square\square_{\square-\square/\square}(\square_{\square}-\square,\square_{\square}-\square) < \frac{\square_{\square}^{\square}/\square_{\square}^{\square}}{\square_{\square}^{\square}/\square_{\square}^{\square}} < \square_{\square/\square}(\square_{\square}-\square,\square_{\square}-\square)\square = 1-\alpha ,$$

整理得

$$P\square\frac{\square_{\square}^{\square}}{\square_{\square}^{\square}}\cdot\frac{\square}{\square_{\square/\square}(\square_{\square}-\square,\square_{\square}-\square)} < \frac{\square_{\square}^{\square}}{\square_{\square}^{\square}} < \frac{\square_{\square}^{\square}}{\square_{\square}^{\square}}\cdot\frac{\square}{\square_{\square-\square/\square}(\square_{\square}-\square,\square_{\square}-\square)}\square = 1-\alpha ,$$

因此,$\frac{\square_{\square}^{\square}}{\square_{\square}^{\square}}$的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\square\frac{\square_{\square}^{\square}}{\square_{\square}^{\square}}\cdot\frac{\square}{\square_{\square/\square}(\square_{\square}-\square,\square_{\square}-\square)}, \frac{\square_{\square}^{\square}}{\square_{\square}^{\square}}\cdot\frac{\square}{\square_{\square-\square/\square}(\square_{\square}-\square,\square_{\square}-\square)}\square.$$

（二） 双总体的情形

2. 两个正态总体方差比的区间估计

例 6　某自动机床加工同类型套筒，假设套筒的直径服从正态分布．现在从 A 和 B 两个不同班次的产品中各抽验了 5 个套筒，测量它们的直径，得如下数据：

A 班：2.066，2.063，2.068，2.060，2.067；

B 班：2.058，2.057，2.063，2.059，2.060．

试求两个班所加工的套筒直径的方差之比$\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的置信度为 0.90 的置信区间．

解　由于两个班所加工的套筒直径的均值 μ_A，μ_B 及标准差 σ_1，σ_2 均未知，因此，两个班所加工的套筒直径的方差之比$\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

（二） 双总体的情形

2. 两个正态总体方差比的区间估计

$$\left(\frac{s_A^2}{s_B^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)},\ \frac{s_A^2}{s_B^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)}\right).$$

由题意，$1-\alpha=0.90$，$n_1-1=4$，$n_2-1=4$，查 F 分布表（附表 5）得

$$F_{\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)=F_{0.05}(4,\ 4)=6.39,$$

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1)=F_{0.95}(4,\ 4)=\frac{1}{F_{0.05}(4,\ 4)}=\frac{1}{6.39}.$$

又由已知数据计算得

$$s_A^2=\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2=0.0000107,$$

$$s_B^2=\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2=0.0000053.$$

2. 两个正态总体方差比的区间估计

因此,方差之比$\frac{□_A^2}{□_B^2}$的置信度为 0.90 的置信区间为

$$□\frac{0.0000107}{6.39\times 0.0000053},\frac{0.0000107}{0.0000053/6.39}□,$$

即(0.3159,12.9).

6.5 非正态总体参数的区间估计

（一）0-1分布参数的区间估计

（二）非正态总体均值的大样本区间估计

（一） 0-1分布参数的区间估计

关于非正态总体的区间估计问题较困难. 然而, 对于大样本(样本容量$n \geqslant 50$), 根据中心极限定理, 可以得出非正态总体的参数的区间估计.

（一） 0-1分布参数的区间估计

设有一容量 $n>50$ 的大样本，它来自 0-1 分布的总体 X，其分布律为

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p\quad (0<p<1),$$

其中 p 为未知参数. 现在来求 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

已知 0-1 分布的均值和方差分别为

$$E(X)=p,\quad D(X)=p(1-p).$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本. 因样本容量 n 较大，由中心极限定理，知

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\ \dot{\sim}\ N(0,1),$$

于是有

$$P\left\{-z_{\alpha/2}<\frac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}<z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha.$$

(一) 0-1分布参数的区间估计

设有一容量 $n>50$ 的大样本,它来自 0-1 分布的总体 X,其分布律为

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p\quad(0<p<1),$$

其中 p 为未知参数. 现在来求 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

已知 0-1 分布的均值和方差分别为

$$E(X)=p,\quad D(X)=p(1-p).$$

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本. 因样本容量 n 较大, 由中心极限定理, 知

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\stackrel{\cdot}{\sim} N(0,1),$$

于是有

$$P\left\{-u_{\alpha/2}<\frac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}<u_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha.$$

（一） 0-1分布参数的区间估计

而不等式

$$-u_{\alpha/2} < \frac{n\bar{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}} < u_{\alpha/2}$$

等价于

$$(n+u_{\alpha/2}^2)p^2-(2n\bar{X}+u_{\alpha/2}^2)p+n\bar{X}^2<0.$$

令 $p_1=\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)$, $p_2=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)$,

此处 $a=n+u_{\alpha/2}^2$, $b=-(2n\bar{X}+u_{\alpha/2}^2)$, $c=n\bar{X}^2$. 于是得到 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(p_1,p_2).$$

（一） 0-1分布参数的区间估计

例 1　从一大批产品的 100 个样品中,检验得到一级品 60 个,求这批产品的一级品率 p 的置信度为 0.95 的置信区间.

解　一级品率 p 是 0-1 分布的参数,此处 $n=100, \bar{x}=60/100=0.6, 1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, u_{\alpha/2}=1.96$,

利用上面结果可以求出 p 的置信区间,其中

$$\square = \square + \square_{\square/2}^{2} = 103.84,\quad b = -(2n\bar{x} + \square_{\square/2}^{2}) = -123.84,$$

$$c = n\bar{x}^2 = 36.$$ 从而 $\square_1 \approx 0.50,\quad \square_2 \approx 0.69.$

故 p 的置信度为 0.95 的置信区间近似为

$$(0.50, 0.69).$$

（二）非正态总体均值的大样本区间估计

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的大样本. 设 $E(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$, μ, σ^2 均为未知. 由中心极限定理, 当 n 充分大时, 设 $\bar{X}$ 为样本均值, 有

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1).$$

但因 σ 未知, 以样本标准差 S 代替总体标准差 σ, 得样本函数 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$, 当 n 充分大时仍近似于 $N(0,1)$ 分布. 它可用于总体均值 μ 的区间估计. 设 u_α 为 $N(0,1)$ 分布的上侧 α 分位数, 有

(二)非正态总体均值的大样本区间估计

$$\square\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\square/\sqrt{\;}}\right| \le \square_{\frac{\square}{2}}\right\} \approx 1-\alpha,$$

或者

$$\square\left\{\bar{X}-\square_{\frac{\square}{2}}\frac{\square}{\sqrt{\;}} \le \mu \le \bar{X}+\square_{\frac{\square}{2}}\frac{\square}{\sqrt{\;}}\right\} \approx 1-\alpha.$$

令

$$\square_1=\bar{X}-\square_{\frac{\square}{2}}\frac{\square}{\sqrt{\;}},\qquad \square_2=\bar{X}+\square_{\frac{\square}{2}}\frac{\square}{\sqrt{\;}},$$

于是得到总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$(\square_1,\ \square_2).$$

（二）非正态总体均值的大样本区间估计

例 2　从一台机床加工的轴中随机地抽取 200 根,测量其椭圆度,算得样本均值$\overline{X}\approx 0.081$ 毫米,样本标准差 $S=0.025$ 毫米.求此机床加工的轴的平均椭圆度的置信度为 0.95 的置信区间.

解　$n=200$,为大样本. $\alpha=0.05, u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$,

$$p_1 = 0.081-1.96\times\frac{0.025}{\sqrt{200}}\approx 0.078,$$

$$p_2 = 0.081+1.96\times\frac{0.025}{\sqrt{200}}\approx 0.084,$$

因此置信区间为

$$(0.078, 0.084).$$