第 三章 随机变量的数字特征

1 数学期望
2 方差
3 几种常见分布的数学期望与方差
4 随机变量矩、协方差与相关系数
5 本章小结

3.1 数学期望

（一）离散型随机变量的数学期望

（二）连续型随机变量的数学期望

（三）随机变量函数的数学期望

（四）数学期望的性质

（一）离散型随机变量的数学期望

为了给出数学期望这个特征数的定义,我们先引入**加权平均**的概念

检查一批圆形零件的直径,任意抽测10件,其结果如下

直径(mm)	98	99	100	102
件数	1	4	2	3

显然,我们不能用

$$\frac{98+99+100+102}{4}=99.75(\text{mm})$$

作为这 10 个零件的平均值,因为 99.75 只是 98,99,100,102 这 4 个数的算术平均,不是 10 个零件直径的平均值.

正确的做法是

$$\begin{aligned}&\frac{98\times1+99\times4+100\times2+102\times3}{10}\\&=98\times\frac{1}{10}+99\times\frac{4}{10}+100\times\frac{2}{10}+102\times\frac{3}{10}\\&=100(\text{mm}).\end{aligned}$$

我们称这种平均为依频率的加权平均,其中 1/10,4/10,2/10,3/10 分别是 98,99,100,102 出现的频率.

（一） 离散型随机变量的数学期望

一般地,对于一组给定的数值 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,知道了它们在 n 次观测中出现的频率分别为 $f_1=\mu_1/n, f_2=\mu_2/n,\cdots,f_m=\mu_m/n$,则它们的依频率的加权平均为

$$\boxed{x_1\frac{\mu_1}{n}+x_2\frac{\mu_2}{n}+\cdots+x_m\frac{\mu_m}{n}\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{m}x_i f_i}$$

同样地,借助于加权平均的概念也可以表示随机变量取值的平均,其权数是随机变量 X 取值 x_i 出现的概率 p_i.

（一） 离散型随机变量的数学期望

定义3.1 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k, \quad k=1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$。即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k.$$

（一） 离散型随机变量的数学期望

例 1 设袋中装有 2 个白球和 3 个红球. 从中无放回地抽取，直到出现两个红球为止，用 X 表示第 2 次取得红球时的取球次数，求 E(X).

解 X 为离散型随机变量，且有

$$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=0.3, P(X=3)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}\cdot\frac{2}{3}=0.4, P(X=4)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}\cdot\frac{2}{2}=0.3,$$

即 X 的分布列为

X	2	3	4
p_i	0. 3	0. 4	0. 3

E(X)=2×0. 3+3×0. 4+4×0. 3=3，即第 2 次取得红球时平均取球次数为 3 次.

（一）离散型随机变量的数学期望

例 2　对某一目标连续射击，直到击中目标为止．设每次射击的命中率为 p．求射击次数的数学期望（或平均射击次数）．

解　设 X 表示直到击中目标为止所需的射击次数，则 X 的概率分布为

$$P(X=k)=pq^{k-1}\quad (q=1-p, k=1,2,\ldots),$$

所以

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\\&=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'\\&=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.\end{aligned}$$

（一）离散型随机变量的数学期望

例 3　设随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=k)=\frac{AB^k}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots.$$

若已知 E (X)=a,求常数 A ,B .

解　因为 $\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$,所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{AB^k}{k!}=A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}=Ae^B=1,\quad 即\quad A=e^{-B}.$$

又因为

$$a=E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{AB^k}{k!}=AB\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=AB\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}=ABe^B=e^{-B}Be^B=B,$$

所以 B=a,　$A=e^{-a}$.

（二） 连续型随机变量的数学期望

定义3.2 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $p(x)$,若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)dx$ 收敛,则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,\mathrm{d}x$ 为 X 的数学期望,记为 $E(X)$, 即

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)dx$$

例 4 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 E(X).

解 由定义,有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2=1.$$

（三） 随机变量函数的数学期望

定理3.1 若随机变量 X 的概率分布已知，则随机变量函数 Y=f(X) 的数学期望为

$$E(Y)=E[f(X)]=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)p_k, & \text{当}X\text{为离散型时，}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)\,dx, & \text{当}X\text{为连续型时，}\end{cases}$$

这里要求上述级数与积分都是绝对收敛的.

上述定理称为**一维表示性定理**.

例 5 设随机变量 X 的分布列为

X	-2	0	2
p_i	0.4	0.3	0.3

试求 $Y=X^2$ 的数学期望.

解 $E(Y)=E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8.$

例 6 设 $X\sim P(\lambda)$,求 $E(X^2)$.

解 考虑到 X 的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad (k=0,1,2,\ldots;\lambda>0),$$

函数 $f(X)=X^2$,由定义有

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\lambda^2 e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\lambda^2+\lambda.$$

(三) 随机变量函数的数学期望

例 7　设 X~U(a,b),求 E(X²).

解　由定义有

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\,dx=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}\,dx$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

(三) 随机变量函数的数学期望

例 8 地铁到达一站的时间为每个整点的第 5 分钟、第 25 分钟、第 55 分钟,设一乘客在早 8 点~9 点之间随时到达,求候车时间的数学期望.

解 设 X 表示乘客到站的时刻,已知 X 在[0,60]上服从均匀分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le x\le 60,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 Y 是乘客等候地铁的时间(单位:分),则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X, & 0<X\le 5,\\ 25-X, & 5<X\le 25,\\ 55-X, & 25<X\le 55,\\ 60-X+5, & 55<X\le 60.\end{cases}$$

因此

$$E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot p(x)\,dx = \frac{1}{60}\int_0^{60} g(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{60}\left[\int_0^5 (5-x)\,dx + \int_5^{25} (25-x)\,dx + \int_{25}^{55} (55-x)\,dx + \int_{55}^{60} (65-x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{60}[12.5 + 200 + 450 + 37.5] \approx 11.67.$$

（三） 随机变量函数的数学期望

定理3.2 若 ξ =(X, Y) 的分布已知，则随机向量的函数 Z=f(X, Y) 的数学期望为

$$E(Z)=E[f(X,Y)]=\begin{cases}\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} f(x_i, y_j)\, p_{ij}, & \xi \text{ 为离散型随} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,p(x,y)\,dx\,dy, & \xi \text{ 为连续型随} \end{cases}$$

这里要求上述的级数和积分都是绝对收敛的.

上述定理称为二维表示性定理.

（三） 随机变量函数的数学期望

例 9 设二维随机变量(X,Y)的联合概率分布为

Y / X	0	1
0	1/8	1/2
1	1/4	1/8

求 $E(X^2Y)$.

解 设 $Z=f(X,Y)=X^2Y$,则

$$□(□) = \sum_{□}\sum_{□} □(□_{□}, □_{□})□_{□□}$$

$$= □(0,0)\times\frac{1}{8} + f(0,1)\times\frac{1}{2} + f(1,0)\times\frac{1}{4} + f(1,1)\times\frac{1}{8}$$

$$= 0\times\frac{1}{8} + 0\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

（三） 随机变量函数的数学期望

例 10 设随机变量 X, Y 相互独立，且均服从 N(0, 1)，求 $E(\sqrt{X^2+Y^2})$.

解 因 X 与 Y 相互独立，且均服从 N(0, 1)，所以 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}},\quad -\infty<x,y<+\infty.$$

故

$$E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\rho\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\,d\rho\,d\theta=2\pi\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\rho^2e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho$$

$$=-\int_0^{+\infty}\rho\,d(e^{-\frac{\rho^2}{2}})=[-\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}]\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

（四） 数学期望的性质

性质1 $E(C)=C$

性质2 $E(CX)=CE(X)$

性质3 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

推论1 $$E(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

性质4 设随机变量X与Y相互独立, □(□·□) = □(□)·□(□).

推论2 x_i 相互独立 $$E(\prod_{i=1}^{n} X_i)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

例 11 一辆送客汽车，载有 m 位乘客从起点站开出，沿途有 n 个车站可以下车，若到达一个车站，没有乘客下车就不停车．设每位乘客在每一个车站下车是等可能的，试求汽车平均停车次数．

解 由于所求的是汽车平均停车的次数，因此，我们从每一个车站有没有人下车来考虑，而不要着眼于每一个乘客在哪一站下车．这里，设

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{站有人下车}, \\ 0, & \text{第}i\text{站没有人下车}, \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

于是，有 $P(X_i = 0) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^m$， $P(X_i = 1) = 1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m$，

因此，随机变量 $X_i \sim B\left(1, 1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right)$，

（四） 数学期望的性质

其均值

$$E(X_i) = 1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m .$$

又设停车次数为 S, 于是有

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

其均值

$$E(S) = n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right).$$

可见, 汽车平均停车次数为 $n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right)$.

3.2 方差

（一） 方差的定义

（二） 方差的性质

（一） 方差的定义

定义3.3 设 X 为随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差，记为 $D(X)$，即

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

同时称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**标准差**或**均方差**，记为 $\sigma(X)$，即

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

注：$D(X)$ 与 $\sigma(X)$ 均度量了 X 与 $E(X)$ 的偏离程度，但 $D(X)$ 与 X 的量纲不一致，而 $\sigma(X)$ 与 X 有相同的量纲，故在实际应用中常采用标准差 $\sigma(X)$.

（一） 方差的定义

随机变量 X 的方差的计算

①利用定义 $\square(\square) = \square\{[\square-\square(\square)]^2\}$

(1)若 X 为离散型随机变量,其分布律为

$$\square(\square = \square_{\square}) = \square_{\square}, \quad k = 1,2,\cdots,$$

则 $$\square(\square) = \square\{[\square-\square(\square)]^2\} = \sum_{\square=1}^{\infty}[\square_{\square}-E(X)]^2\square_{\square};$$

(2)若 X 为连续型随机变量,其概率密度为 p(x),则

$$\square(\square) = \square\{[\square-\square(\square)]^2\} = \square_{-\infty}^{+\infty} x-E(X)]^2 p(x)d\square.$$

(一) 方差的定义

随机变量 X 的方差的计算

②利用公式 $\square(\square)=\square(\square^2)-(E(X))^2$.

由方差的定义和数学期望的性质，有

$$\square(\square)=\square(\square-\square(\square))^2=E[\square^2-2XE(X)+(E(X))^2]$$

$$=\square(\square^2)-2E(X)\cdot E(X)+(E(X))^2$$

$$=\square(\square^2)-(E(X))^2.$$

(一) 方差的定义

例 1 设随机变量 X 的概率分布为

X	2	3	4
p_i	0.3	0.4	0.3

求 X 的方差 D(X).

解 因为

$$E(X) = 2\times 0.3 + 3\times 0.4 + 4\times 0.3 = 3,$$
$$E(X^2) = 2^2\times 0.3 + 3^2\times 0.4 + 4^2\times 0.3 = 9.6,$$

所以

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 9.6 - 3^2 = 0.6.$$

（一） 方差的定义

例 2　设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

试求 D(X).

解　由题设知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

于是

（一） 方差的定义

$$E(X)=\int_{-1}^{1} x\,p(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1} x^2 p(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\overset{\text{令}\,x=\sin\theta}{=}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2},$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}$.

（二） 方差的性质

性质1 $D(C)=0$

性质2 $E(CX)=C^2E(X)$

性质3 $D(X+C)=D(X)$

性质4 设随机变量 X 与 Y 相互独立, $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

推论3 x_i 相互独立 $D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$

性质5

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

例 3 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x e^{-x^2-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 试求 X, Y 的边缘概率密度，并验证 X 与 Y 是否相互独立.

(2) 求 E(2X ± 3Y)， D(2X ± 3Y).

解 (1) X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

$$= \begin{cases} \int_0^{+\infty} 2x e^{-x^2-y}\,dy = 2x e^{-x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases}$$

(二) 方差的性质

同理可求得 Y 的边缘概率密度为

$$\square_{\square}(y)=\square\begin{cases}\square e^{-\square}, & \square>0,\\ 0, & \square\le 0.\end{cases}$$

因为 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)\ (-\infty<x,y<+\infty)$，所以 X 与 Y 相互独立.

(2) 因为

$$\square(\square)=\square_{-\infty}^{+\infty}\square\square_{\square}(x)\,d\square=\square_{0}^{+\infty}2\square^2e^{-\square^2}d\square$$

$$=[-\square e^{-\square^2}]\Big|_0^{+\infty}+\square_0^{+\infty}e^{-\square^2}d\square=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\square(\square^2)=\square_0^{+\infty}\square^2\cdot 2xe^{-\square^2}d\square=[-\square^2e^{-\square^2}]\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\square_0^{+\infty}2e^{-\square^2}d\square=[-e^{-\square^2}]\Big|_0^{+\infty}=1,$$

所以 $D(X)=E(\square^2)-[E(X)]^2=1-\frac{\pi}{4}.$

（二） 方差的性质

类似地，$E(Y)=2,\ E(Y^2)=6$，所以

$$\square(\square) = \square(\square^2)-[E(Y)]^2 = 6-4 = 2.$$

所以

$$\square(2\square \pm 3\square) = 2\square(\square) \pm 3\square(\square) = \text{ص}\bar{\pi} \pm 6,$$

$$\square(2\square \pm 3\square) = 4\square(\square) + 9\square(\square)$$

$$= 4(1-\frac{\pi}{4}) + 18 = 22-\pi.$$

（二） 方差的性质

在概率统计中,经常需要对随机变量做“标准化”，对任何随机变量 X,若它的数学期望 E(X),方差 D(X)都存在,且 $D(X)>0$,则称

$$X^* = \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的**标准化随机变量**.易见 X^*是一无量纲的随机变量,且 $E(X^*)=0, D(X^*)=1$.这正是标准化随机变量所具有的特征.特别地,若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,则 X 的标准化随机变量为

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

3.3 几种常见分布的数学期望和方差

（一）0-1分布

（二）二项分布

（三）泊松分布

（四）均匀分布

（五）指数分布

（六）正态分布

（一） 0-1分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p,$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)-p^2$$

$$=pq.$$

(二) 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n),$$

$$0<p<1.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

（二） 二项分布

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

（二） 二项分布

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]$$

$$=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{k}{n}p^k(1-p)^{n-k}+np$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}+np$$

（二）二项分布

$$= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}p^{k-2}(1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2[p+(1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2-n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (n^2-n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

(三) 泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda.$$

(三) 泊松分布

$$E(X^2)=E[X(X-1)+X]$$

$$=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}+\lambda$$

$$=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

所以 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$

泊松分布的期望和方差都等于参数 λ.

（四） 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$，其概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{1}{b-a} x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(a+b).$$

结论　均匀分布的数学期望位于区间的中点.

（四） 均匀分布

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

（五） 指数分布

设随机变量 X 服从指数分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$ 其中 $\theta>0$.

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x$$

$$=-xe^{-x/\theta}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-x/\theta}\,\mathrm{d}x=\theta.$$

（五） 指数分布

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \, dx - \theta^2$$

$$= 2\theta^2 - \theta^2$$

$$= \theta^2.$$

指数分布的期望和方差分别为 θ 和 θ^2.

(六) 正态分布

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其概率密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

则有 $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d} x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow x = \mu + \sigma t,$

所以 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$=\mu.$$

（六）正态分布

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

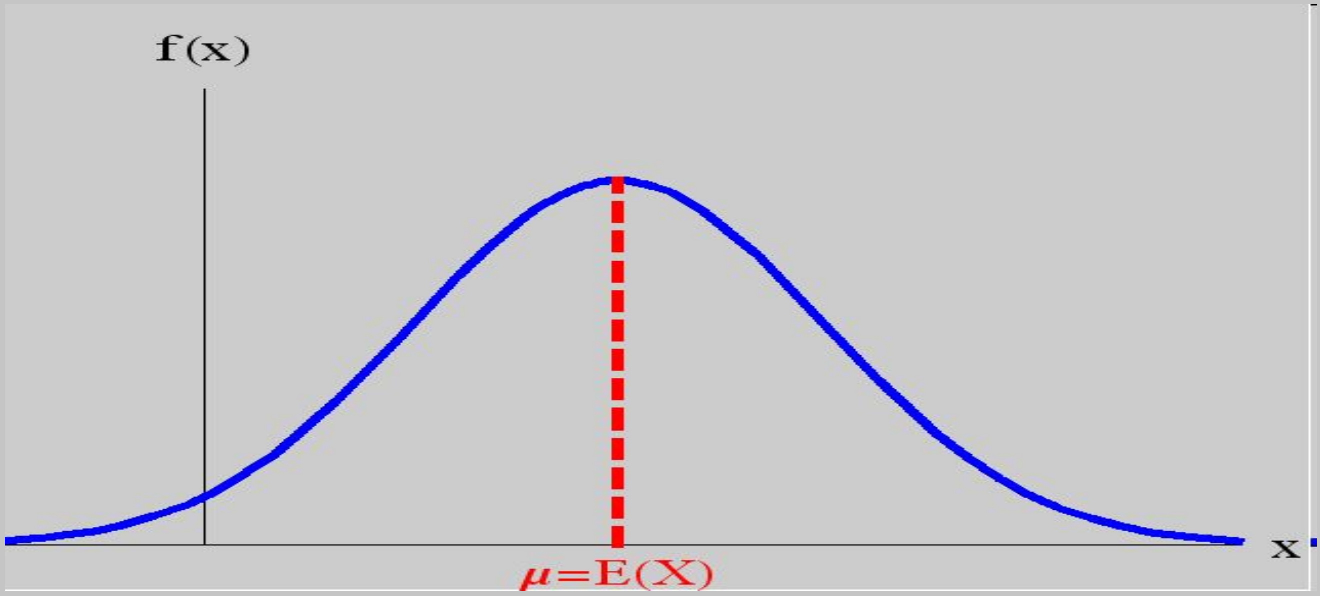
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$，得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2.$$

正态分布的期望和方差分别为两个参数 μ 和 σ^2.



分　　布	参数	数学期望	方差
0-1分布	$0 < p < 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1$, $0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta > 0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu, \sigma > 0$	μ	σ^2

第三章 随机变量的数字特征

1 数学期望

2 方差

3 几种常见分布的数学期望与方差

4 随机变量矩、协方差与相关系数

5 本章小结

3.4 随机变量矩、协方差、相关系数

（一）原点矩与中心矩

（二）协方差

（三）相关系数

（一） 原点矩与中心矩

定义3.4 对于正整数 k，随机变量 X 的 k 次幂的数学期望称为 X 的 **k 阶原点矩**，记为 v_k，即

$$v_k = E(X^k), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

于是，我们有

$$v_k = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k p_i, & \text{当 } X \text{ 为离散型时,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\,dx, & \text{当 } X \text{ 为连续型时.} \end{cases}$$

注： 随机变量 X 的 1 阶原点矩就是 X 的数学期望.

（一）原点矩与中心矩

定义3.4 对于正整数k，随机变量X与E(X)差的k次幂的数学期望称为X的**k阶中心矩**，记为μ_k，即

$$\mu_k = E(X-E(X))^k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

于是，我们有

$$\mu_k = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - E(X))^k p_i, & \text{当 } X \text{ 为离散型时}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^k p(x)\,dx, & \text{当 } X \text{ 为连续型时}. \end{cases}$$

注：X的1阶中心矩为0；X的2阶中心矩为X的方差.

（一） 原点矩与中心矩

定义3.6 对于随机变量 X 与 Y, 如果有 $E(X^kY^l)$ 存在, 则称之为 X 与 Y 的 k+l 阶**混合原点矩**, 记为 ν_{kl}, 即

$$\nu_{kl}=E(X^kY^l);$$

如果有 $E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l]$ 存在, 则称之为 X 与 Y 的 k+l 阶**混合中心矩**, 记为 μ_{kl}, 即

$$\mu_{kl}=E[(X-E(X))^k(Y-E(Y))^l].$$

（二）协方差

1.协方差定义

定义3.7 对于随机变量 X 与 Y，称它们的二阶混合中心矩 μ_{11} 为 X 与 Y 的协方差或相关矩，记为 σ_{XY} 或 cov(X, Y)，即

$$□_{□□} = □_{11} = E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

与记号 σ_{XY} 相对应，X 与 Y 的方差 D(X) 与 D(Y) 也可分别记为 σ_{XX} 与 σ_{YY}.

特别地，当 X=Y 时，有

$$\mathrm{cov}(□, □) = □(□).$$

2.协方差计算

协方差的基本计算公式:

$$\mathrm{cov}(□,□) = □(□□)-□(□)□(□).$$

事实上,

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(□,□) &= □\{[□-□(□)][□-□(□)]\} \\ &= □(□□)-2□(□)□(□)+□(□)□(□) \\ &= □(□□)-□(□)□(□).\end{aligned}$$

3. 协方差性质

由协方差的定义，可得下面关于协方差的性质.

性质1 $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$

性质2 $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(Y,X)$

性质3 $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$

（三） 相关系数

1.相关系数定义

定义3.8 对于随机变量 X 与 Y，若 D(X)>0，D(Y)>0，则称

$$\frac{\mathrm{cov}(\square,\ \square)}{\square\ \overline{\square(\square)\ \square(\square)}}$$

为 X 与 Y 的相关系数，记为 ρ 或 ρ_{XY}，即

$$\square = \square_{\square\square} = \frac{\mathrm{cov}(\square,\ \square)}{\square\ \overline{\square(\square)\ \square(\square)}} = \frac{\square\{[\square-\square(\square)][\square-\square(\square)]\}}{\square\ \overline{\square(\square)\ \square(\square)}}.$$

（三） 相关系数

2.相关系数性质

定理3.3 随机变量 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} 具有如下性质:

(1) $|\rho_{XY}| \leqslant 1$;

(2) $|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是存在常数 $a \neq 0, b$, 使 $P(Y=aX+b)=1$, 即 $\rho_{XY}=1$ 或 $\rho_{XY}=-1$ 的充要条件是随机变量 X 与 Y 以概率 1 存在线性关系.

2.相关系数性质

定义3.8 若 $\rho=0$，则称随机变量 X 与 Y 不相关. 否则，称 X 与 Y 相关，其中，

若 $\rho>0$，则称 X 与 Y 正相关；

若 $\rho<0$，则称 X 与 Y 负相关；

若 $|\rho|=1$，则称 X 与 Y 完全相关.

（三） 相关系数

2.相关系数性质

定理3.4 若随机变量X与Y相互独立，则X与Y不相关.

证明 由于 X 与 Y 相互独立，所以 $cov(X, Y)=0$，从而 $\rho_{XY}=0$，即 X 与 Y 不相关.

需要指出的是上述定理的逆定理不成立，即 $\rho_{XY}=0$ 时，X 与 Y 不相关，但 X 与 Y 不一定相互独立.

（三） 相关系数

例 1 设随机变量 $\theta \sim U[-\pi, \pi]$, $X=\sin\theta$, $Y=\cos\theta$, 求 ρ_{XY} 并讨论 X 与 Y 的相互独立性.

解

$$\square(\square) = \frac{1}{2\pi} \square_{-\pi}^{\pi} \sin \square d\square = 0,$$

$$\square(\square) = \frac{1}{2\pi} \square_{-\pi}^{\pi} \cos \square d\square = 0,$$

$$\square(\square) = \square(\square^2) = \frac{1}{2\pi} \square_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta \, d\square = \frac{1}{2},$$

$$\square(\square) = \square(\square^2) = \frac{1}{2\pi} \square_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \, d\square = \frac{1}{2},$$

$$\square(\square\square) = \frac{1}{2\pi} \square_{-\pi}^{\pi} \sin \square \cos \square d\square = 0,$$

$$\mathrm{cov}(\square, \square) = \square(\square\square) - \square(\square)\square(\square) = 0,$$

因此 $\rho = \rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{cov}(\square, \square)}{\square\square(\square)\square(\square)} = 0.$

（三）相关系数

例 2 将一枚均匀硬币重复掷 n 次，并以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数．求 X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解 由条件知 $X \sim B(n, \frac{1}{2})$，$Y \sim B(n, \frac{1}{2})$，且 $X+Y=n$，于是

$$\square(\square+\square)=\square(\square)=0.$$

由于 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\square\overline{\square(\square)}\square\overline{\square(\square)}$，而 $D(X)=D(Y)=\frac{\square}{4}$，因此解得 $\rho_{XY}=-1$.

注意，本题也可根据完全相关的定义，由 $X+Y=n$，导出 $Y=-X+n$，可见 $\rho=-1$.

（三） 相关系数

例 3　设 A,B 为随机事件,且

$P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$,令

$$\square = \square \begin{matrix} 1, & \square\text{发生}, \\ 0, & \square\text{不发生}, \end{matrix} \qquad Y = \square \begin{matrix} 1, & \square\text{发生}, \\ 0, & \square\text{不发生}. \end{matrix}$$

求:(1)二维随机变量(X,Y)的概率分布;

(2) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

（三） 相关系数

解 （1）由于

$$\square(\square\square)=\square(\square)\square(\square|\square)=\frac{1}{12},\ \square(\square)=\frac{\square(\square\square)}{\square(\square|\square)}=\frac{1}{6},$$

所以

$$\square\{\square=1,\square=1\}=\square(\square\square)=\frac{1}{12},$$

$$\square\{\square=1,\square=0\}=\square(\square\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$\square\{\square=0,\square=1\}=\square(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$\square\{\square=0,\square=0\}=\square(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{\square\cup\square})$$

$$=1-\square(\square\cup\square)=1-[\square(\square)+\square(\square)-\square(\square\square)]=\frac{2}{3}$$

$$\square或\square\{\square=0,\square=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}\square$$

（三） 相关系数

故 (X, Y) 的概率分布为

Y / X	0	1
0	$\frac{□}{□}$	$\frac{□}{□□}$
1	$\frac{□}{□}$	$\frac{□}{□□}$

（2） X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
p_i	$\frac{□}{□}$	$\frac{□}{□}$

Y	0	1
p_i	$\frac{□}{□}$	$\frac{□}{□}$

则 $E(X)=\frac{1}{4}$, $E(Y)=\frac{1}{6}$, $D(X)=\frac{3}{16}$, $D(Y)=\frac{5}{36}$, $E(XY)=\frac{1}{12}$,故

$$\mathrm{cov}(□,□) = □(□□)-□(□)□(□) = \frac{1}{24},$$

从而 $$□_{□□} = \frac{\mathrm{cov}(□,□)}{□\sqrt{□(□)}□\sqrt{□(□)}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$